EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

24e JAARGANG 1948/49
Nr 4

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang ƒ 8.00*. Zij die nevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (ƒ 8.00*) zijn ingetekend, betalen ƒ 6.75*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van ƒ 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1948 t/m 31 Augustus 1949 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van ƒ 4,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. Ook voor 1 September 1949—1 September 1950 is de contributie vastgesteld op ƒ 4,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen ƒ 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, Van Lenneplaan 16, Tel. K 2950; 5558.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstr. 88; Tel. K 2900; 27119.

INHOUD.

Oordeel over Eindexamenvraagstukken van 1949.

In verband met het op de laatste Algemene Vergadering aangenomen voorstel zal het Bestuur van Wimecos het op prijs stellen een goed gefundeerd oordeel over de eindexamenvraagstukken van het jaar 1949 te ontvangen. Indien de opmerkingen der leden hier aanleiding toe geven, kunnen dan aan de autoriteiten bepaalde wensen ter kennis gebracht worden. De Secretaris: J. J. TEKELENBURG.

neiging om dergelijke geestelijke abstracties te voltrekken komt slechts verspreid voor en wie haar niet spontaan voelt, brengt het gewoonlijk niet verder dan tot de beredeneerde erkenning, dat er toch wel iets in zit en dat het toch wel een verrijking moet beduiden om het schijnbaar afgezaagde en versletene oude weer te kunnen zien in den glans van nieuwheid, die het omgaf toen het gevonden werd.

Ik geloof, dat dit alles wel verklaart, waarom men in ons land van officiële zijde het Stevin-jubileum zo volkomen veronachtzaamd heeft. Dat behoeft ons niet te verhinderen, die verwaarlozing te betreuren. Het gebrekkig historisch inzicht, waarvan zij blijk geeft, behoorde bij de overheid niet voor te komen. Het is in dit verband de moeite waard, een vergelijking te maken tussen de intensiteit, waarmee het Departement van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen in 1947 de Hooft-herdenking heeft bedreven en de afzijdigheid, die het ten aanzien van het Stevin-jubileum betracht heeft. Reeds lang van te voren was een officiële commissie ingesteld om de herdenking voor te bereiden; in een speciale plechtigheid voerden de Minister en verscheidene deskundigen het woord; de schooljeugd werd in de viering betrokken; er verscheen een boek, waarin de betekenis van den Drost voor de Nederlandse cultuur in het licht werd gesteld. Men kan dat alles van ganser harte toejuichen zonder daarom echter na te laten, het ijzige stilzwijgen over Stevin er mee te vergelijken. Want behoort deze, reeds om zijn relatie tot Maurits, niet tot onze belangrijke nationale figuren, is hij niet, evenzeer als Hooft, een der grondleggers van onze taal? Zou het zoveel moeilijker zijn geweest, de jeugd van Nederland te doordringen van de historische betekenis van den uitvinder van het rekenen met decimale breuken en van het clootcransbewijs dan haar de schoonheid van het treurspel Bato te doen beseffen? Zou dit op het Departement nooit bedacht zijn of zou men daar wellicht nog leven in de vroeger algemeen gangbare en tegenwoordig nog lang niet uitgestorven opvatting, dat alleen kunst en religie cultuuruitingen zijn, maar wetenschap, en wel speciaal wiskunde en natuurwetenschap, niet?

Ik wil van mijn opmerkingen over het verschil tussen historische betekenis op wetenschappelijk en op artistiek of wijsgerig gebied nog een ander gebruik maken dan er de verklaring aan te ontlenen van het feit, dat zonder het initiatief van het Bestuur van ons Genootschap er in ons land geen Stevinherdenking geweest zou zijn. Zij kunnen ons tevens leren, dat zulk een herdenking in de beperking, die in haar omschrijving ligt opgesloten, feitelijk onuit-

voerbaar is. Men kan in stricten zin Stevin alleen niet herdenken; men kan slechts de herinnering oproepen aan een niet te nauw begrensde periode, waarbinnen zijn leven viel en de plaats trachten te bepalen, die zijn werk daarin inneemt. Men kan iemand laten zien, hoe hij decimale breuken schreef en loopt dan de kans, dat hij het erg onbeholpen zal vinden. En men zou hem alleen kunnen uitleggen, wat er zo belangrijk aan is, wanneer men tijd genoeg had, de geschiedenis van het cijferschrift te vervolgen van de Sumeriers af langs de Grieken, de Romeinen, de Indiërs en de Arabieren tot in de Middeleeuwen en de Renaissance en bovendien te laten zien, welke mogelijkheden, culminerend in de uitvinding der logarithmen, er voor de rekentechniek en daarmee voor de gehele wis- en natuurkunde door geopend werden. Men kan hem Stevins *Driehouckhandel* voorleggen, dat een compleet leerboek van de vlakke en bolvormige driehoeksmeting is en hij zal waarschijnlijk geïmponeerd zijn door de volledigheid en het systematisch karakter van de behandeling. Maar wanneer men er bij kan vertellen, wat de Arabieren, Regiomontanus, Corpernicus, Werner en Tycho Brahe op dit gebied reeds hadden bereikt, zal het hem duidelijk worden, dat Stevin hier meer ordenend dan scheppend te werk gaat en dat hij in de luttele bladzijden van het kleine geschrift *De Thiende*, dat aan het rekenen met decimale breuken gewijd is, meer tot de ontwikkeling der wiskunde heeft bijgedragen dan in de honderden foliobladzijden die den *Driehouckhandel* vormen. Eerst een voldoende diepte in de historische uiteenzetting, die de bestudeerde werken toont als schakels van een ontwikkelingsketen, stelt dus in staat, hun ware betekenis voor de wetenschapsgeschiedenis te bepalen en uit te maken, in hoeverre hun schrijver scheppend en vernieuwend en in hoeverre hij afrondend en conserverend gewerkt heeft.

Wanneer men dit onderzoek voor Stevins geschriften uitvoert, komt men tot de conclusie, dat deze beide evenzeer belangrijke, maar in hun aard wezenlijk onderscheiden functies in zijn werk aanvankelijk ongeveer tegen elkaar opwegen, maar dat zich op lateren leeftijd bij hem het vooral bij wiskundigen niet ongebruikelijke verschijnsel voordoet, dat de schaal doorslaat naar den ordenenden, systematiserenden kant. Zijn grote en originele vondsten, de decimale breuknotatie en het rekenen met thiendetalen, het clootcransbewijs voor de wet van het hellend vlak, de krachtendriehoek, de statica van het vaste lichaam met één onbeweeglijk punt, de hydrostatische paradox en de berekening van de kracht die een vloeistof door haar gewicht op den zijwand van een vat

uitoefent, dateren alle van voor 1590, maar dezelfde periode bevat ook typische ordeningsprestaties zoals de berekening van rentetafels, de arithmetische behandeling van de Euclidische irrationaliteiten, de verbetering van de oplossingsmethode van de vierkantsvergelijking. Na 1590 komt zijn originaliteit voornamelijk tot uiting in zijn vestingbouwkundig werk *Stercktenbouwing* en zijn zeevaartkundig geschrift *Havenvinding*. De grote *Wisconstighe Ghedachtenissen* echter zijn vóór alles een leerboek, een voortreffelijke heldere en systematische samenvatting van wat er in de verschillende vakken bekend was met al de grote verdiensten, die aan dergelijk werk eigen kan zijn, met al de mogelijkheden ook om in details eigen vondsten en inzichten te verwerken, maar zij dragen niet meer direct bij tot de ontsluiting van nieuwe terreinen van wetenschappelijk onderzoek; indirect natuurlijk wel: door werken als dit wordt een jongere generatie in staat gesteld, op een hoger niveau te beginnen, vrij van de belemmeringen van slechte formulering en gebrekkige notatie, die hun voorgangers nog ondervonden en die de auteur voor hen uit den weg heeft geruimd.

Stevin verloochent de qualiteiten van de goede leerboekschrijver, den lust tot scherpe formulering, den overzichtelijken opbouw, de exacte bewijsvoering en de volledige behandeling, ook dan niet, wanneer hij als originele vernieuwer werkt. Hij behoort niet tot de hautaine geesten als Descartes, die handen vol geniale gedachten uitstrooien, waaraan de epigonen dan tientallen jaren werk hebben, voordat er ten volle partij van kan worden getrokken. Wat Stevin schrijft, is altijd volkomen af, naar klassieken Euclidischen trant op grond van bepalingen en begeerten in feilloze opvolging van voorstellen gebouwd. Hij bestudeert een onderwerp, rondt het af, schrijft er een boek over en publiceert het, daarmee met de daad zich richtend naar den wijzen raad, dien Faraday later zal geven: Work, Finish, Publish.

Van hoe eminente waarde het volgen van deze gedragslijn voor den bloei der wetenschap is, kan nauwelijks duidelijker worden ingezien dan door Stevin te vergelijken met een anderen natuurwetenschappelijk begaafden Nederlander uit zijn tijd, met Isaac Beeckman. Deze stond in rijkdom aan vruchtbare wetenschappelijke gedachten, in phantasie en vindingrijkheid misschien wel boven hem, maar hij stelde zich er mee tevreden, alles wat hem inviel in den vorm van losse aantekeningen in zijn *Journael* te noteren en de wetenschap heeft van zijn denkarbeid op zijn best indirect, namelijk in zoverre als hij op anderen inspirerend kan hebben gewerkt, kunnen profiteren.

Aan dit niet publiceren van wetenschappelijke vondsten is een dubbel nadeel verbonden, een voor de gemeenschap der wetenschap, die er geen partij van kan trekken en een, niet minder ernstig, voor den auteur zelf, die den heilzamen prikkel mist, zijn gedachten systematisch te moeten ordenen en uiteenzetten, die dus niet ervaart, op hoevele punten zij nog onvoldragen zijn en die ze daardoor maar onvoldragen laat. Het merkwaardige is echter, dat dit karakter van onvoltooidheid er in het oog van het nageslacht vaak een aureool van genialiteit aan verleent, dat tegen kritisch onderzoek soms helemaal niet bestand blijkt te zijn. De ongemotiveerd grote reputatie, die Leonardo da Vinci op grond van zijn over talloze blaadjes verspreide en zeer onsamenhangende aantekeningen geniet, vormt er een sprekend voorbeeld van. De auteurs verontschuldigen zich soms, dat zij nooit tijd hebben kunnen vinden om het onderzoek af te maken of de resultaten ervan te boek te stellen, zoals b.v. Newton, die 83 jaar werd, ten aanzien van de voortzetting van zijn op 24-jarigen leeftijd begonnen optische onderzoekingen deed. In feite echter geldt de opmerking van Thomas Mann, dat al het grote in den regel niet tot stand komt dank zij maar ondanks iets, ondanks drukke werkzaamheden, lichamelijke zwakte, gebrek of ondeugd.

De verdienste van Stevins werkzaamheid als wat we nu maar kortweg leerboekschrijver zullen blijven noemen, stijgt in enkele van zijn boeken tot een peil, waarop men het nauwelijks meer als een tekort voelt, dat het toch eigenlijk denkbeelden van anderen zijn, die hij behandelt. Dit is met name het geval in dat gedeelte van de *Wisconstighe Ghedachtenissen*, waarin onder den titel *Hemelloop* de uiteenzetting en verdediging van het stelsel van Copernicus gegeven wordt. Het boek is met volmaakte didactische kunst opgebouwd. Uitgaande van een in tafels gecondenseerd waarnemingsmateriaal omtrent de bewegingen, die we de zon, de maan en de planeten aan den hemel zien uitvoeren, leert het de verschijnselen eerst redden van het voor de hand liggende geocentrische standpunt uit, om vervolgens de vereenvoudiging te tonen, die door den overgang op het heliocentrische verkregen wordt, terwijl het dien overgang, die in verband met de excentriciteiten van de banen en deferenten nog niet zulk een heel eenvoudige zaak is, volkomen helder en exact leert uitvoeren. Hoewel er geen originele bijdragen tot de astronomie in staan, leende het zich in zijn systematischen en doorzichtigen bouw ongetwijfeld veel beter tot het verspreiden van de nieuwe opvattingen dan het oorspronkelijke werk van Copernicus.

De beroemdste werken der wereldlitteratuur zijn zelden ook het

meest geschikt om de tijdgenoten en de op hen volgende generaties in de nieuwe denkwijzen in te leiden. Griekse astronomie leert men gemakkelijker uit Peurbach's *Theorica Planetarum* dan uit den *Almagest*, de Italiaanse algebra van de zestiende eeuw beter uit Bombelli dan uit Cardano, de klassieke mechnica wordt in negentiende-eeuwse leerboeken duidelijker behandeld dan in Newton's *Principia*. En zo kan men iemand, die zich in de Copernicaanse astronomie wil inwerken, Stevins *Hemelloop* bepaald eerder aanraden dan *De Revolutionibus*.

De *Hemelloop* is behalve om zijn intrinsieke waarde opmerkelijk om het tijdstip (tussen 1600 en 1608) waarop het werk werd samengesteld en waarop dus Stevin reeds onvoorwaardelijk adhaesie betuigde aan de leer der dubbele aardbeweging. Men moet er zich in het algemeen bij de beschouwing van zijn geschriften steeds goed van bewust blijven, in hoe hoge mate zij altijd vóór bepaalde belangrijke jaren vallen. Zijn werk op het gebied van de algebra is ouder dan dat van Vieta, dat eerst ca. 1600 gepubliceerd werd; zijn *Weeghconst* komt voor de *Diversae Speculationes* van Benedetti en a fortiori lang voor de werken van Galilei; de daarin beschreven proef ter weerlegging van de evenredigheid tussen valsnelheid en gewicht gaat enkele jaren vooraf aan de beroemde proef van den Scheven Toren te Pisa, die bovendien legendair is. En zo moest, toen zijn Hemelloop verscheen, er nog een jaar verstrijken, voordat Kepler's *Astronomia Nova* en twee, voordat Galilei's *Nuncius Sidereus* het licht zouden zien. Van de bekende geschriften, die de leer van Copernicus aanhangen, is alleen Kepler's *Mysterium Cosmographicum*, dat hij niet gekend heeft, ouder. Er spreekt uit de aanvaarding van het Copernicaanse stelsel dan ook een grote zelfstandigheid van oordeel en uit de wijze, waarop hij het verdedigt, een zeer helder inzicht in de verdiensten ervan. Er komt hem dan ook om dit werk een belangrijker plaats in de geschiedenis der astronomie toe, dan hem gewoonlijk gegund wordt. Het is natuurlijk onbetwistbaar, dat werkelijke vooruitgang in de wetenschap slechts tot stand wordt gebracht door het ontdekken van nieuwe feiten, zoals Galilei, of het opstellen van nieuwe theorieën, zoals Kepler deed, maar er was in het begin van de zeventiende eeuw nog zoveel geestelijke inspanning nodig om los te komen van het om redenen van natuurwetenschappelijken, wijsgerigen en theologischen aard zoveel overtuigender geocentrische stelsel, dat men de auteurs, die hiertoe in belangrijke mate hebben meegewerkt, niet spoedig te hoog waardeert.

Voor dergelijk werk was Stevin als het ware geroepen. Daar hij

nooit een universitaire opleiding had genoten, maar van de practijk uit tot de beoefening van de wetenschap gekomen was, stond hij veel vrijer tegenover de nieuwe denkbeelden dan de meesten van zijn wetenschappelijk gevormde tijdgenoten. Het universitaire onderwijs was in die dagen nog doortrokken van den Aristotelischen geest en wie eenmaal daarin was opgevoed, raakte den stempel ervan nooit helemaal kwijt, hoe fel vijandig hij zich wellicht ook tegen het stelsel keren mocht. Stevin echter was tegen dien invloed beschermd door het sterkste pantser, dat zich op geestelijk gebied laat denken, dat der onwetendheid. Hij is als Parsifal, der reine Tor, en staat daardoor niet bloot aan de verleidingen, die de universitaire Graalridders van de zijde van Klingsor-Aristoteles altijd bleven bedreigen.

Er is bij hem dan ook geen sprake van de verschillende bezwaren van physischen aard, die van den tijd van Ptolemaios af tegen de leer van de bewegende aarde waren aangevoerd en die b.v. Tycho altijd weerhouden hebben, het Copernicaanse stelsel, waarvan hij de astronomische merites heel goed besefte, te aanvaarden. Maar even onbevangen als tegenover de traditie staat hij tegenover de denkbeelden van Copernicus zelf. Deze had zich genoodzaakt gezien, om naast de dagelijkse aswenteling en de jaarlijkse beweging om de zon nog een derde beweging aan te nemen, omdat hij de beweging van de aardas om de zon niet als een cirkelvormige translatie, maar als een rotatie zag. Stevin voelt dadelijk de overbodigheid van de compenserende conische beweging, die Copernicus nog aan de aardas had moeten toeschrijven en al kunnen wij tegenwoordig de magnetische interpretatie, die hij van haar onveranderlijken stand in de hemelruimte gaf, niet meer aanvaarden, zo blijft het toch ontegenzeggelijk een stap vooruit dat hij de derde aardbeweging, die Kepler in het *Mysterium Cosmographicum* van 1596 nog had overgenomen, heeft afgeschaft.

De verklaring, die hij er van gaf — hij zag er een magnetisch effect in, dat te illustreren is door het voorbeeld van een draaibaar opgestelde magneetnaald,, die, in een kring rondgedragen, steeds denzelfden kant uit blijft wijzen — getuigt van den groten invloed, dien Gilbert's in 1600 verschenen werk *De Magnete* op het natuurwetenschappelijk denken van zijn tijd heeft uitgeoefend en waarvan we ook bij Kepler en Galilei zo duidelijk de symptomen aantreffen. Des te opmerkelijker is het, dat Stevin die toch in zijn zeevaartkundige beschouwingen zoveel met kompassen te maken had en in wiens systeem van plaatsbepaling op zee de veranderlijkheid van de declinatie van de magneetnaald zulk een essentiële betekenis

heeft, helemaal geen notitie neemt van de uitvoerige physische beschouwingen over het magnetisme, die het werk verder bevat.

Dit strookt echter wel weer met de algemene richting van zijn belangstelling, die veel meer op het mathematische en mechanische gericht is dan op het physisch-chemische. Men verwondert zich wel eens over Stevins veelzijdigheid en inderdaad heeft hij zich op de meest uiteenlopende gebieden bewogen, maar deze liggen toch alle aan één kant van de scheidingslijn, die de meer formele zijde der natuurverschijnselen van de meer materiële scheidt. Hierbij speelt wellicht behalve zijn natuurlijke aanleg ook het ontbreken van een universitaire opleiding een rol. Men kan namelijk aan de peripatetische natuurwetenschap veel verwijten, maar niet, dat ze geen belangstelling voor de raadselen van het stoffelijke zou hebben bezeten. Beschouwingen over de structuur der materie, over het wezen van de chemische binding, over physische optica en over meteorologie hebben er altijd een belangrijke plaats in ingenomen en in het wezen van het magnetisme heeft zij zich altijd met voorkeur verdiept. Daardoor was ook voor wie haar bestreden reeds dadelijk een program van natuuronderzoek gegeven, dat Stevin altijd vreemd is gebleven. Dit verklaart ook, waarom hij, met uitzondering van een enkele waarneming over vallende lichamen, zich nooit heeft beziggehouden met de in de scholastiek zo druk besproken verschijnselen van val en worp, waarover Beeckman wel belangrijke dingen gezegd heeft.

Het zijn eigenlijk alleen een verhandeling over geomorphologie en opmerkingen over kwelwater in zijn vestingbouwkundig werk, die geheel op zuiver physisch terrein liggen. De hydrostatica vormt bij hem namelijk geheel een onderdeel van de mechanica en wordt evenals deze op zuiver mathematische wijze behandeld. Of hij daaraan in zijn helaas verloren gegane verhandeling *Van het Lochtwicht* een analoge behandeling van de aërostatica heeft toegevoegd, zoals Pascal die in zijn *Traités* zou geven, is niet met zekerheid te zeggen; waarschijnlijk is het echter niet, omdat hij niet als Pascal zou hebben kunnen uitgaan van de proef van Torricelli, terwijl er geen enkele aanwijzing is, dat hij zelf in deze richting iets heeft gedaan.

Men moet overigens bij de beoordeling van de keuze der onderwerpen, die Stevin in zijn werken behandelt, nooit vergeten, dat deze althans na ca 1590 in hoge mate bepaald werd door de wensen en behoeften van Prins Maurits, voor wien hij de verhandelingen, die in de *Wisconstighe Ghedachtenissen* verzameld zijn, heeft samengesteld. Zo was het de uitdrukkelijke wens van den Prins om

perspectief te leren, die tot het opnemen van het belangrijke geschrift *Van de Verschaeuwing* aanleiding heeft gegeven en zijn belangstelling in hippische aangelegenheden, waaraan *Van den Toomprang* zijn ontstaan te danken heeft. En zo zal men ook het ontbreken van onderwerpen, die men graag ook behandeld zou hebben willen zien en die ook wel in Stevins lijn lagen, meer aan Maurits dan aan hem zelf moeten wijten. Wanneer de Prins zich geinteresseerd had voor den pas uitgevonden Hollandsen kijker en voor de methode van kaarttekening, die Mercator had aangegeven, zouden we waarschijnlijk ook verhandelingen over geometrische optica en kartographie van Stevins hand bezitten.

In dienst van den Prins levert Stevin zijn geschriften als het ware op bestelling. Dat verklaart ook, waarom hij vrijelijk gebruik maakt van het werk van anderen, b.v. op het gebied der zeevaartkunde van dat van Edward Wright. Het was den Prins er om te doen, zo goed mogelijk met verschillende vakken op de hoogte te komen en het zal hem daarbij weinig geïnteresseerd hebben, van wien de stof, die hem werd voorgezet, precies afkomstig was.

Aan den anderen kant verdient Maurits dank van het nageslacht om het vele, dat hem wel belang inboezemde en bewondering voor het wetenschappelijk karakter van die belangstelling. Zijn grote voorliefde voor de toegepaste wiskunde heeft ons in het bezit gesteld van het uitvoerige werk *De Meetdaet*; aan de conscientieuse wijze, waarop hij zijn ambt van Admiraal-Generaal opvatte, danken we de *Zeylstreken* en de *Havenvinding* en waarschijnlijk is het ook wel zijn intense beoefening van de vestingbouwkunde geweest, die Stevin aanleiding, heeft gegeven, het kostelijk geschrift *Sterctenbouwing* samen te stellen, dat wellicht zijn allerpersoonlijkste uiting vormt.

Het overwegend didactisch karakter van Stevins productie maakt uiteraard de beoordeling van zijn plaats in de wetenschapsgeschiedenis veel moeilijker dan bij iemand als Christiaan Huygens het geval is. Wat Huygens noteert en publiceert zijn altijd volkomen zelfstandige oorspronkelijke wetenschappelijke onderzoekingen en resultaten, op grond waarvan zijn historische positie nauwkeurig te bepalen is. Bij Stevin geldt ditzelfde slechts voor enkele werken, met name de *Weeghconst* en het *Waterwicht*, terwijl in de *Wisconstighe Ghedachtenissen* waarin, naar omvang beschouwd, ongeveer twee derde van zijn gehele oeuvre verzameld is, zijn eigen aandeel zich helemaal niet meer laat afzonderen uit het totaalbeeld dat hij van de wetenschap van zijn tijd geeft.

Deze opmerking mag echter ook weer niet leiden tot de gedachte,

dat de kennisneming van Stevins geschriften uit historisch oogpunt minder belangrijk zou zijn dan die van de werken van Huygens. Een samenvattend beeld van het weten en kunnen van een periode, gezien door het medium van een tijdgenoot die er volkomen mee op de hoogte is en in staat, er een heldere uiteenzetting van te geven, heeft in verband met het collectief karakter, dat aan alle wetenschappelijke activiteit eigen is, een waarde, die door de nauwkeurige kennis van het aandeel, dat iedere individuele onderzoeker van dat tijdvak er in gehad heeft, wel kan worden aangevuld, maar die er in haar eigen aard niet wezenlijk meer door verhoogd wordt.

En dit is dan ook de reden, dat men aan het leerboek-karakter, dat een groot deel van Stevins werken kenmerkt, geen argument zou kunnen ontlenen om hem nog langer te onthouden wat aan andere grote figuren uit de Nederlandse wetenschapsgeschiedenis, met name aan Christiaan Huygens, Isaac Beeckman en Anthonie van Leeuwenhoek zo onbekrompen gegund wordt, een kritische en gecommentarieerde heruitgave van hun werken.

Ik geloof, dat deze 400e herdenking van Stevins geboorte de aangewezen gelegenheid is, dit punt nog eens ter sprake te brengen. Ik wil daartoe kort de argumenten samenvatten, die de conclusie wettigen, dat Nederland en België gezamenlijk te kort schieten in een nationale verplichting door Stevins werken nog langer prijs te geven aan de vergetelheid, die hun bibliografische zeldzaamheid met zich meebrengt.

1. Stevin is door zijn werk op rekenkundig en algebraïsch gebied een van de zeer belangrijke wiskundige auteurs van de zestiende eeuw, die vooral om zijn invoering der decimale breuken de internationale historische aandacht verdient. Op het gebied van mechanica en hydrostatica behoort hij tot de grote figuren van de vernieuwing, die de natuurwetenschap in het tijdvak tussen Copernicus en Newton heeft ondergaan. Door zijn verdediging van het stelsel van Copernicus is hij van belang in de geschiedenis der astronomie, door zijn *Zeylstreken en Havenvinding* in die van de zeevaartkunde. In zijn *Sterctenbouwing* legt hij de fundamenten van de oud-Nederlandse fortificatiemanier, die bijna twee eeuwen lang de meest gezaghebbende methode op vestingbouwkundig gebied zal blijven. Door zijn *Legermeting* levert hij een belangwekkende bijdrage tot de geschiedenis der krijgswetenschap.

2. In de leerboeken op het gebied van wiskunde, mechanica, sterrenkunde, zeevaartkunde, boekhouden en vermogensbeheer, die hij ten gerieve van Prins Maurits samenstelde, geeft hij een samen-

vatting van den stand van deze wetenschappen op het eind van de zestiende eeuw, die men nergens anders in zo grote uitvoerigheid, veelzijdigheid en voortreffelijke uitvoering kan aantreffen.

3. Door het nauwe verband waarin Stevin in een van de belangrijkste perioden van de geschiedenis van ons land tot den Stadhouder en het Staatse leger heeft gestaan, moet hij tot onze grote nationale figuren worden gerekend.

4. Door zijn principiële voorkeur voor het Nederlands als voertaal der wetenschap boven het Latijn, die hem dwong voor tal van wetenschappelijke begrippen inheemse termen in te voeren en door de grote vindingrijkheid die hij daarbij ten toon heeft gespreid, behoort hij tot de grondleggers van de taal, die wij nog steeds spreken en moet hij zelfs tot de klassieke auteurs van ons taalgebied worden gerekend.

De laatste twee argumenten, die alleen een nationale strekking hebben, maken het nodig, zijn werken in de oorspronkelijke taal te herdrukken, de eerste twee, er een vertaling in een der moderne talen aan toe te voegen.

De uitgave zal, wil zij doel treffen, voorzien moeten zijn van historische inleidingen en toelichtende noten in de te gebruiken vreemde taal. In dit opzicht zal zij dus een soortgelijken arbeid vereisen als aan de werken van Huygens en Leeuwenhoek ten koste is gelegd. Zij zal echter anderzijds met veel minder moeite tot stand kunnen worden gebracht, omdat al het materiaal, dat gepubliceerd zal moeten worden, reeds in gedrukten vorm aanwezig is; er zal geen ontcijfering van manuscripten nodig zijn. Een belangrijke vraag vormt natuurlijk de te verwachten omvang. Om deze te schatten heb ik het totale aantal bladzijden berekend van de te publiceren werken met commentaren en inleidingen, alles herleid op het formaat van de Huygens-uitgave. Dit leidde tot de conclusie, dat een integrale uitgave circa tien delen van dit formaat zou beslaan.

Hierbij moet nu echter wel de vraag onder ogen worden gezien, of het inderdaad verantwoord zou zijn, om, gesteld dat de materiële mogelijkheid hiertoe bestond, al zijn werken, zoals ze er liggen, te herdrukken. Ik meen dat die vraag ontkennend moet worden beantwoord. Wanneer men denkt aan de vele tafels, die in de *Wisconstighe Ghedachtenissen* zijn opgenomen, aan de afzonderlijke behandeling, die elk der planeten ondervindt en waarbij toch telkens dezelfde methode wordt toegepast, aan de zeer uitvoerig uitgewerkte voorbeelden op het gebied van boekhouden en vermogensbeheer, dan kan men moeilijk volhouden, dat het voor het wekken van een juist

inzicht in Stevins wetenschappelijke productie nodig zou zijn, dit alles in extenso weer te geven.

Men zou dus kunnen overgaan tot het publiceren van een selectie uit zijn werk, voorzien van de nodige verwijzingen naar de ondanks hun zeldzaamheid toch altijd nog beschikbare niet in de uitgave opgenomen werken. Het zou dan, naar het mij toelijkt, mogelijk zijn met een omvang van twee delen van het formaat der Huygens-uitgave te volstaan. Daarmee zou Stevin dan het gedenkteken verkrijgen, waarop hij recht heeft en dat zowel de ware betekenis van zijn wetenschappelijke figuur in binnen- en buitenland bekend zou maken als een indruk van zijn menselijke persoonlijkheid zou geven.

Toen er honderd jaar geleden ook een Stevinherdenking plaats had, heeft de stad Brugge hem geëerd door de oprichting van het standbeeld, dat nog steeds de Simon Stevin-plaats siert. In ons land besefte men in dien tijd nog niet in het minst, wat de Nederlanden in hem bezeten hadden en in België vormde hij nog een om politieke redenen omstreden figuur. Thans is zowel ginds als bij ons, zij het dan ook in beperkten kring, het volledig besef van zijn betekenis wel aanwezig. Moge dit er toe leiden, dat door samenwerking van de regeringen of van geleerde genootschappen van beide landen thans het duurzamere monument tot stand zal komen, waarmee men een grote figuur uit de wetenschapsgeschiedenis eerst de eer geeft, die hem waarlijk toekomt.

LEVENSVERZEKERINGSWISKUNDE [1])

door

Dr A. G. PLOEG.

Het behoort haast tot de goede toon, dat een spreker in een hem niet geheel bekend gezelschap aanvangt met te gewagen van de aarzeling, waarmede hij de uitnodiging tot het vervullen van een spreekbeurt aanvaard heeft. Als dat waar is moet ik me tot de uitzonderingen rekenen, want na enige overdenking van de consequenties van mijn bevestigend antwoord op de uitnodiging ben ik meer en meer bekoord door de gedachte, dat het mij aldus mogelijk zou zijn belangstelling te wekken voor het aantrekkelijke arbeidsveld, dat het verzekeringswezen aan wiskundig-begaafde jongelieden vermag te bieden, en dat nog wel bij hen, die wel in de allereerste plaats in staat en ook genegen zullen zijn hierop de aandacht te vestigen van de hierbedoelde leerlingen, die hen uit de aard der zaak na aan het hart zullen liggen. Als er bij mij enige aarzeling is geweest, dan is die pas achteraf verschenen toen ik van Uw secretaris vernam op welke een belangrijke opkomst tot deze vergadering moest worden gerekend en toen ik in de convocatie voluit als „lezing" over „verzekeringswiskunde" zag aangekondigd wat ik als een huiselijke causerie had gedacht. De bijvermelding van mijn functie kan echter een nivellerende werking hebben uitgeoefend in zoverre zij een aanwijzing kon zijn, dat ik het meer in practische dan in wetenschappelijke richting zal zoeken. Want dit heeft bij mij nog wel een punt van overweging uitgemaakt: Moest ik het accent leggen op de laatste helft van de woordcombinatie „verzekeringswiskunde" en dus na misschien een korte inleiding ineens naar de diepte afsteken of — wellicht passender uitgedrukt — naar de hoogte opstijgen om U hetzij enkele bergtoppen te doen bestijgen hetzij een wijd panorama te tonen? Zoals ik reeds deed uitkomen, heb ik het in andere richting willen zoeken. Hoe wordt de verzekeringswiskunde in de practijk gebruikt en dan niet in een enkel op zichzelf staand geval, doch in de practijk van elke dag op een levensverzekeringmaatschappij?

---

[1]) Tekst van de door Dr A. G. Ploeg op 5 Januari 1949 voor de vergadering van „Wimecos" met enige bekorting gehouden causerie.

Er zal ook dan nog wel gelegenheid zijn door enkele aanduidingen aan te geven, hoe men de eenvoudige theorie op hoger plan heeft gebracht.

Ik zou dan naar het geijkte gebruik van elke opleiding in de elementaire verzekeringswiskunde willen uitgaan van de samengestelde intrestrekening, waarop ik natuurlijk niet nader inga. Uit mijn eigen H.B.S.-tijd herinner ik mij hoe dit vak enkel en alleen als een toepassing van reeksen en logarithmen werd behandeld, dientengevolge diametraal verschillend van wat in de practijk gebeurt, waar om te beginnen de logarithmentafel niet meer gebruikt wordt. Ik wijs op 2 essentiële dingen: de universele notatie en het gebruik van rentetafels. De universele notatie is de notatie, die vastgesteld is op het 2e Internationale congres van Actuarissen in 1898, later enigszins gewijzigd. Enkele grondbeginselen zijn, dat alle symbolen betrekking hebben op de eenheid, en dat elke letter haar bepaalde betekenis heeft. Zo stelt i voor de rentevoet per eenheid (dus peruun en niet percent) bij achteraf-betaling van intrest en d die bij vooruitbetaling. Voorts worden contante waarden met A of a (druk- of schrijfletter) aangeduid al naar gelang zij op eenmalige of op periodieke betalingen betrekking hebben, en eindwaarden met S of s (druk- of schrijfletter). Voorts wordt een duur aangegeven met een index rechts onderaan, omgeven door een haak. Aldus ontstaan:

$A_{\overline{n}|}$ = contante waarde van eenheid, betaalbaar over n jaar;
$a_{\overline{n}|}$ = contante waarde van eenheid 's-jaars, praenumerando betaalbaar gedurende n jaar;
$\mathit{a}_{\overline{n}|}$ = contante waarde van eenheid 's-jaars, postnumerando betaalbaar gedurende n jaar;
$S_{\overline{n}|}$ = eindwaarde van eenheid na oprenting gedurende n jaar;
$\mathcal{s}_{\overline{n}|}$ = eindwaarde van eenheid 's-jaars, praenumerando betaalbaar gedurende n jaar;
$s_{\overline{n}|}$ = eindwaarde van eenheid 's-jaars, postnumerando betaalbaar gedurende n jaar.

Deze grootheden worden niet telkens berekend maar afgelezen uit rentetafels. Gecompliceerde waarden worden evenmin berekend, maar uitgedrukt in deze grootheden, die uit de rentetafels worden afgelezen. B.v. de n jaar durende praenumerando rente, ingaande echter eerst over m jaar, z.g. m jaar uitgesteld, symbool $_{m|}a_{\overline{n}|}$ kan worden herleid tot $A_{\overline{m}|}\, a_{\overline{n}|}$ of tot $a_{\overline{n+m}|} - a_{\overline{m}|}$, maar in de laatste vorm met de minste moeite vastgesteld. Een belangrijke betrekking, die in de echte levensverzekeringswiskunde een grotere rol speelt, is $A_{\overline{n}|} = 1 - d a_{\overline{n}|}$ of $A_{\overline{n}|} = 1 - i \mathit{a}_{\overline{n}|}$, eenvoudig te ver-

klaren door toepassing van het z.g. aequivalentiebeginsel, omdat wie een bedrag 1 uitleent als contraprestatie betalingen zal ontvangen nl. hoofdsom 1 over n jaar en rente i of d 's-jaars gedurende n jaar, welker totale contante waarde weer 1 moet zijn. Ik volsta voorts met alleen te *wijzen* op de koersberekening als toepassing van de intrestrekening. Wie in behandeling van de intrestrekening op de aangegeven wijze belang stelt kan ik verwijzen in de eerste plaats naar het boek van Prof. van Haaften, Leerboek der Intrestrekening, of misschien nog beter naar het boekje Koersberekening van Joh. Hage, dat in een inleiding tevens de intrestrekening behandelt, beide uitgegeven bij Noordhoff.

Ik ga dan over tot de eigenlijke levensverzekeringswiskunde, die men zich ontstaan kan denken door aan de intrestrekening de sterftekans als nieuw element toe te voegen. Er zijn vele definities gegeven van levensverzekering; ik volsta hier met de definitie van de Wet op het Levensverzekeringbedrijf: overeenkomsten van levensverzekering zijn overeenkomsten tot het doen van geldelijke uitkeringen tegen genot van premie in verband met leven en dood van de mens. Terwijl de intrestrekening dus werkt met vaststaande uitkeringen moet de verzekeringswiskunde leren onzekere uitkeringen te waarderen. Nu blijkt, dat aan de sterfte een zekere wetmatigheid ten grondslag kan worden gelegd, die het mogelijk maakt de kansrekening toe te passen. Ik druk me hier voorzichtig uit. Sterfte is zeker geen verschijnsel, dat met een zuiver kansspel als het werpen met een dobbelsteen of het trekken van ballen uit een urn kan worden vereenzelvigd. Het gaat er alleen om, dat voor de practijk een bruikbaar kanssysteem kan worden gekozen, dat toestaat de voor de uitoefening van het levensverzekeringbedrijf nodige berekeningen met voldoende graad van nauwkeurigheid uit te voeren. Ik kom hierop nog terug.

Toepassing van de kanswaarde maakt het mogelijk de berekeningen uit te voeren met gebruikmaking van het begrip ,,mathematische verwachting". Als ik een kans p heb om een bedrag K te ontvangen is de mathematische verwachting $p\mathrm{K}$. Als ik een kans ${}_np_x$ heb om over n jaar in leven te zijn en dan een bedrag 1 zal ontvangen, is mijn mathematische verwachting, dus de contante waarde van de uitkering waarop ik recht heb ${}_np_x\, \mathrm{A}_{\overline{n|}}$, in de verzekeringswiskunde aangegeven door het symbool $\mathrm{A}_{x\overset{1}{\overline{n|}}}$, waarin zoals steeds x de huidige leeftijd voorstelt. Op deze wijze wordt gevonden voor de contante waarde van een dadelijk ingaande n jaar durende postnumerando lijfrente voor een x-jarige $a_{x\overline{n|}}\ \sum_{1}^{n} {}_mp_x\, \mathrm{A}_{\overline{m|}}$; bij praenumerando betaling $\mathrm{a}_{x\overline{n|}}\ 1 + \sum_{1}^{n-1} {}_mp_x\, \mathrm{A}_{\overline{m|}}$.

Het analogon van de betrekking $A_{\overline{n}|} = 1 - da_{\overline{n}|}$ der intrestrekening wordt nu in de levensverzekeringswiskunde

$$A_{x\overline{n}|} = 1 - da_{x\overline{n}|}$$

en daarin stelt dan $A_{x\overline{n}|}$ voor de contante waarde van een uitkering ineens over n jaar of aan het einde van het sterfjaar bij eerder overlijden, nl. bij het einde van de tijdelijke lijfrente. U herkent hierin de koopsom van een verzekeringsvorm, die tot voor b.v. 20 jaar verreweg het meeste voorkwam.

Wenst de x-jarige deze verzekering te sluiten tegen betaling van een jaarlijkse premie, die we $P_{x\overline{n}|}$ zullen noemen, dan passen we weer het aequivalentiebeginsel toe en vinden

$$P_{x\overline{n}|}\, a_{x\overline{n}|} = A_{x\overline{n}|}$$

waaruit $$P_{x\overline{n}|} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{a_{x\overline{n}|}} = \frac{1}{a_{x\overline{n}|}} - d.$$

Mag Christiaan Huygens door zijn verhandeling „Van Rekeningh in Spelen van Geluck" (1657) tot de grondleggers der kansrekening worden gerekend, het was Johan de Witt in zijn „Waardije van Lijf-renten naar proportie van Los-renten" (1671), die voor het eerst aangaf hoe deze dienstbaar kon worden gemaakt aan de berekening van lijfrentekoopsommen en die daarom als de grondlegger der levensverzekeringswiskunde moet worden beschouwd. Het zijn deze twee tijdgenoten, die waarschijnlijk door politieke oorzaken niet rechtstreeks met elkaar in contact stonden doch wel gemeenschappelijke relaties hadden als bv. de Amsterdamse burgemeester Hudde, die vereeuwigd zullen worden door standbeelden voor het nieuwe gebouw der Nationale Levensverzekering-Bank aan de Schiekade te Rotterdam. Daarmede gaat tevens in vervulling een door Prof. Schuh in zijn openingsartikel van het tijdschrift Christiaan Huygens uitgesproken wens, dat nog eens een standbeeld voor deze mathematicus mocht worden opgericht.

Van Johan de Witt stamt het denkbeeld bij de berekening van een sterftetafel gebruik te maken. Indien de sterfte geen in de loop van de tijd veranderlijk verschijnsel ware, zou men kunnen zeggen, dat een sterftetafel aangeeft hoeveel van een bepaald aantal pasgeborenen, bv. 100.000, er na 1, 2, 3, enz. jaar nog in leven zijn. In zijn eenvoudigste vorm ontstaat dus een tabel, die naast elke leeftijd x aangeeft het aantal levenden l_x. Uit zulk een sterftetafel kunnen nu alle kansen eenvoudig door delingen worden

berekend. Zo is bv. de reeds gebruikte kans, dat een thans x-jarige over n jaar nog in leven is

$$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}. $$

Onder de sterftekans van een x-jarige wordt verstaan de kans om binnen 1 jaar te overlijden, aangegeven door

$$ q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}. $$

Omgekeerd kan de sterftetafel ook worden opgebouwd als voor de opeenvolgende leeftijden de sterftekans q_x gegeven is. Dit is de normale procedure, want de sterfte is wèl een met de tijd veranderlijk verschijnsel, zoals algemeen bekend is, en een tafel, die de werkelijke afsterving van een aantal jonggeborenen zou aangeven, zou dus onder elkaar bevatten bv. de zuigelingensterfte van 1840, de sterfte onder 30-jarigen van 1870, de sterfte onder 60-jarigen van 1900 enz. Men gaat nu echter na wat volgens de ervaring in een bepaald tijdvak en in een bepaalde categorie, bv. voor de mannelijke Nederlandse bevolking tussen 2 volkstellingsdata, is geweest de sterftekans voor iedere leeftijd volgens een rekenwijze, waar ik nu niet langer bij stilsta. Daarna leidt men daaruit af een sterftetafel, die dus een beeld geeft van de sterfte in die periode en voor die groep mensen. Zo zijn allerlei sterftetafels ontstaan: oudere, die in vgl. met nieuwere een hogere sterfte aanwijzen, bevolkingstafels, die in vgl. met z.g. ervaringstafels, betrekking hebbend op geselecteerde levens, hogere sterfte aanwijzen, enz. Een beeld van het sterftepeil van een tafel geeft een daar vaak in opgenomen grootheid: de gemiddelde levensduur, zijnde het aantal jaren, dat iemand van zekere leeftijd gemiddeld nog voor de boeg heeft indien de sterfte conform de tafel verloopt. In de aantallen levenden uitgedrukt wordt dit bij aanname, dat de sterfte steeds aan het begin van het jaar plaats vindt (afgekorte gemiddelde levensduur)

$$ e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots}{l_x} $$

resp. indien de sterfte wordt aangenomen op het midden van het jaar (complete gemiddelde levensduur) $\mathring{e}_x = e_x + \frac{1}{2}$. Het begrip gemiddelde levensduur is dus onverbrekelijk aan een bepaalde leeftijd gebonden. Wordt zonder meer van de gemiddelde levensduur in Nederland gesproken, dan wordt daarmede als regel die

voor de jonggeborene bedoeld, welke in de loop der jaren sterk is gestegen als gevolg vnl. van de daling der zuigelingensterfte. Er is echter voor alle leeftijden een stijging. Bv. voor een 60-jarige man bedroeg zij volgens de eerste bevolkingssterftetafel (periode 1840—1851) 12,1 jaar en voor de laatste (periode 1931—1940 exclusief oorlogssterfte) 16,3 jaar. Voor de levensverzekeringswiskunde speelt de gemiddelde levensduur verder geen rol; in het bizonder mag men de waarde van een levenslange lijfrente niet gelijkstellen met de waarde van een vaste rente gedurende de gemiddelde levensduur.

Met behulp van de grootheden uit de sterftetafel kunnen nu verschillende formules in elegante vorm worden herleid.

$$A_{x\overline{n}|}^{\;1} = {}_np_x\, A_{\overline{n}|} = \frac{l_{x+n}\, A_{\overline{x+n}|}}{l_x\, A_{\overline{x}|}}$$

waaruit door invoering van $D_x = l_x A_{\overline{x}|}$ ontstaat

$$A_{x\overline{n}|}^{\;1} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

In aansluiting daarop wordt

$$a_{x\overline{n}|} = 1 + \sum_{1}^{n-1} {}_mp_x A_{\overline{m}|} = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots \frac{D_{x+n-1}}{D_x}$$

hetgeen bij invoering van $N_x = \Sigma\, D_x$ wordt $a_{x\overline{n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$.

Op dezelfde wijze kan voor de koopsom van een levenslange verzekering voor uitkering bij overlijden worden geschreven, uitgaande van sterfte aan het einde van het jaar:

$$A_x = \frac{d_x A_{\overline{1}|}}{l_x} + \frac{d_{x+1} A_{\overline{2}|}}{l_x} + \ldots = \frac{d_x A_{\overline{x+1}|} + d_{x+1} A_{\overline{x+2}|} + \ldots}{l_x A_{\overline{x}|}}$$

waaruit door substitutie $C_x = d_x A_{\overline{x+1}|}$ en daarna $M_x = \Sigma\, C_x$ gevonden wordt

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}.$$

Zo worden dan de sterftetafels aangevuld met kolommen D_x, N_x, C_x, M_x, z.g. commutatietekens, uit welke grootheden practisch alle formules kunnen worden opgebouwd.

Ik wil dan nog even stilstaan bij het begrip wiskundige of premiereserve. Los van alle formules komt het hierop neer: Als iemand bv. een levenslange verzekering voor uitkering bij overlijden zou

sluiten en elk jaar de premie zou willen betalen, die precies het risico van dat jaar dekt (z.g. natuurlijke premie), zou dit een stijgende premie zijn daar immers de sterftekans met de leeftijd stijgt. Regel is echter, dat zulk een verzekering wordt gesloten tegen een gelijkblijvende premie, die dus aanvankelijk meer dan de natuurlijke premie bedraagt. De maatschappij mag het meerdere echter niet als winst beschouwen, doch moet dit reserveren voor de latere jaren, waarin minder dan de natuurlijke premie zal worden ontvangen.

Algemener kan worden betoogd als volgt. Stel iemand heeft op x-jarige leeftijd een of andere verzekering gesloten, waarvoor hij gedurende n jaar een premie $P_{(x)}$ moet betalen. Intussen is hij m jaar ouder geworden. Zou hij zich nu dezelfde uitkering willen verzekeren door voor de nog resterende looptijd een geheel nieuwe verzekering te sluiten, die hem precies hetzelfde bood, dan zou hij daarvoor gedurende nog $(n-m)$ jaar een premie $P_{(x+m)}$ moeten betalen. In het algemeen is $P_{(x+m)} > P_{(x)}$, want de verzekerde is ouder geworden, de uitkeringsdatum is dichterbij enz. De maatschappij kan hem alleen verzekerd houden tegen de premie $P_{(x)}$ omdat zij uit vorige jaren heeft overgehouden en wel precies zoveel als aequivalent is met het premieverschil over de nog resterende duur der premiebetaling, dus

$$\{P_{(x+m)} - P_{(x)}\}\, a_{x+m,\,\overline{n-m}|}.$$

Werken wij het uit, dan komt er

$$P_{(x+m)}\, a_{x+m\,\overline{n-m}|} - P_{(x)}\, a_{x+m,\,\overline{n-m}|}$$

en de eerste term daarin stelt juist voor de koopsom van de verzekering, zo die na m jaar nieuw gesloten werd, wij kunnen die met $A_{(x+m)}$ aangeven en vinden dan voor de reserve

$$A_{(x+m)} - P_{(x)}\, a_{x+m,\,\overline{n-m}|}.$$

Dit kunnen wij verklaren als het verschil tussen de contante waarde der lasten minus die der baten, beide berekend m jaar na ingang der verzekering. Dit nu is de wiskundige reserve, zijnde dus het bedrag dat de maatschappij m jaar na ingang der verzekering in bezit moet hebben om tezamen met nog komende premiën en intrest aan haar verplichtingen te kunnen voldoen.

Voorts moet aandacht worden geschonken aan het feit, dat tot dusverre alle onkosten, die het bedrijf maakt, buiten beschouwing zijn gebleven. Zij zijn voor een levensverzekeringmaatschappij te onderscheiden in eerste kosten, gemaakt bij afsluiting der verzekering, administratiekosten tijdens de looptijd der verzekering en incassokosten tijdens de duur der premiebetaling. Deze moeten

vanzelfsprekend ook uit de ontvangen premiën bestreden kunnen worden. De ervaring heeft geleerd, dat:

de afsluitkosten het beste worden afgemeten naar het verzekerde bedrag, stel α per eenheid;

de jaarlijkse administratiekosten eveneens, stel β per eenheid 's-jaars zolang de *verzekering* loopt, zijnde bv. m jaar;

de incassokosten naar de brutopremie, stel γ per eenheid zolang de *premiebetaling* zal duren, zijnde bv. n jaar.

De brutopremie P^b wordt dan uit de nettopremie P^n afgeleid volgens de formule

$$P^b = \left\{ P^n + \frac{\alpha}{a_{x\overline{n}|}} + \frac{\beta a_{x\overline{m}|}}{a_{x\overline{n}|}} \right\} \times \frac{1}{1-\gamma}.$$

Het spreekt wel vanzelf, dat hier evenals bij de intrestrekening het werk zoveel mogelijk gerationaliseerd wordt. Van de meest voorkomende grootheden worden tabellen gereedgemaakt en formules worden zoveel mogelijk uitgedrukt in grootheden, die uit gereedliggende tabellen kunnen worden afgelezen. Het aantal verzekeringsmogelijkheden is nl. practisch onbeperkt. In het tarievenboek van elke maatschappij vindt U een grote varieteit maar dagelijks worden aan het wiskundige bureau nog weer andere combinaties ter berekening voorgelegd.

Ik zou nu verder nog kunnen ingaan op allerlei andere berekeningen, die te verrichten zijn. Bv. in verband met het recht op afkoop, premievrijmaking, omzetting in een verzekering van andere vorm enz., maar moet daar uit gebrek aan tijd van afzien. Voor verdere kennisneming moge worden verwezen naar de beide deeltjes Elementaire Levensverzekeringswiskunde door Van Haaften, eveneens uitgegeven bij Noordhoff. U zult uit het besprokene echter wel reeds hebben begrepen, dat er op het wiskundig bureau heel wat gerekend moet worden. De aard van dit rekenwerk is echter uiteenlopend. Er is werk bij, dat in hoofdzaak neerkomt op netheid, accuratesse, uit de ogen kijken en dgl. algemene eigenschappen. Bv. het gereedmaken van een tafel van tijdelijke lijfrenten volgens een aangegeven rekenwijze, het berekenen van premiën voor nieuwe polissen volgens normale vormen aan de hand van het gedrukte tariefboekje met eenheidspremiën. Maar daarnaast zijn nodig, ook al weer in verschillende gradaties, krachten, die in staat zijn voor willekeurige verzekeringsvormen formules af te leiden en met behulp van gegeven berekeningsgrondslagen de premiën te berekenen, waarbij dan nog voldoende critisch inzicht vereist is om de uitkomst aan reeds voorhanden

gegevens te toetsen, te onderzoeken of speciale voorwaarden moeten worden gesteld ten aanzien van keuring, provisieuitkering e.d.

Voor jongelui, die dgl. problemen met kennis van zaken weten te behandelen, bestaat gelegenheid een diploma te verwerven, het actuariële diploma A. Waar juist het afgelopen jaar de vakopleiding in geheel nieuwe banen is geleid, leek het mij nuttig in het kader van deze causerie daaraan niet voorbij te gaan. Het diploma A omvat interpolatiemethoden, intrestrekening, sterftetafels, actuariële becijferingen en enkele bizondere onderwerpen. Het moet worden voorafgaan door een Voorbereidend examen in algebra en Nederlands (opstel) doch bezitters van einddiploma H.B.S. B of Gymn. B hebben daarvan vrijstelling en bezitters van einddiploma H.B.S.-A of Gymn. A behoeven alleen algebra te doen.

Ik moet er echter terstond op wijzen, dat het bezit van dit diploma de bezitter nog niet stempelt tot actuaris. De levensverzekeringswiskunde is met onderwerpen van de boven aangegeven trant nog geenszins uitgeput.

In de eerste plaats moet ik er op wijzen, dat de theorie uitbreiding heeft ondergaan door toepassing van de continue methode. Er was nog slechts sprake van het rekenen met discrete elementen: perioden van als regel een vol jaar, gehele aantallen levenden met van jaar tot jaar wisselende sterftekansen.

De uitdrukking $S_{\overline{n}|} = (1 + i)^n$ heeft in beginsel alleen zin als n een geheel aantal jaren voorstelt, overeenkomstig de definitie van i als een intrestvoet per jaar. Voor n niet geheel zijn nadere afspraken nodig. Algemener kan men stellen $\overline{S}_{\overline{n}|} = e^{\delta n}$, waarin δ wordt genoemd de rente-intensiteit en n een willekeurig geheel of gebroken getal kan zijn. Is n geheel dan komt de gewone formule terug als $\delta = \log (1 + i)$ zodat in eerste benadering de renteïntensiteit met de rente-peruun overeenstemt. Aangetoond kan worden, dat hetzelfde resultaat bereikt wordt als men de rente i niet per jaar achteraf bijgeschreven denkt, doch in termijnen i/m per $1/m$ jaar achteraf en daarna m naar ∞ laat naderen. Op overeenkomstige wijze kan ook van de jaarlijks betaalbare annuïteit $a_{\overline{n}|}$ worden overgegaan op de continu betaalbare annuïteit $\overline{a}_{\overline{n}|}$. Hier blijft dan ook weer gelden een betrekking $\overline{A}_{\overline{n}|} = 1 - \delta\, \overline{a}_{\overline{n}|}$ en in het algemeen heeft elke formule uit de discrete intrestleer haar analogon in de continue intrestleer. Een complete ontwikkeling van de continue intrestleer geeft een bij Paris in 1943 verschenen dissertatie van De Geus. De theorie moet niet gezien worden

als een spel met wiskundige symbolen, maar haar uitkomsten zijn wel degelijk vatbaar voor practische toepassing. Vooral in de sociale verzekering wordt gerekend met uitkeringen in kleine (week- of zelfs dag-)termijnen en het werken met de continue grootheden geeft dan een behoorlijke benadering en vereenvoudiging.

Evenzo kan ook de levensverzekeringswiskunde op continue grondslag worden opgebouwd. De grootheden l_x geven de aantallen levenden met tussenpozen van 1 jaar, dus voor gehele waarden van x; daar tussen in wordt eenvoudigheidshalve wel vaak een lineair verloop aangenomen maar juist is dit strikt genomen natuurlijk niet. Men heeft nu steeds gezocht l_x uit te drukken in een analytische functie van x, welke ook voor gebroken waarden van x betekenis zou hebben. In plaats van met de sterftekans

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

wordt dan gewerkt met de sterfte-intensiteit

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{d_x}.$$

Er zijn allerlei z.g. sterftewetten afgeleid, die naar wel vanzelf zal spreken alle een bepaalde sterftetafel maar met een zekere benadering weergeven. Een veel gebruikte wet is de Wet van Makeham, die het verband tussen l_x en x voorstelt door de formule

$$l_x = ks^x g^{c^x}.$$

Deze wet kan worden afgeleid, uitgaande van de voorwaarde, dat de toeneming der sterfteïntensiteit van jaar tot jaar verloopt volgens een meetkundige reeks. Terloops worde opgemerkt, dat dit voor geen enkele sterftetafel voor alle leeftijden van 0 tot 100 jaar het geval is. De sterftekans neemt tot ongeveer 12-jarige leeftijd niet toe, doch af en gaat eerst daarna weer met de leeftijd stijgen. Men moet dus niet meer verlangen dan dat de Wet van Makeham de sterftetafel benaderend weergeeft vanaf bv. 20-jarige leeftijd. De procedure is dan deze, dat eerst op de normale wijze de sterftetafel wordt samengesteld en dat deze daarna z.g. wordt afgerond volgens Makeham door voor 4 uiteenliggende leeftijden de gevonden waarde van l_x in de formule te substitueren en daarna uit de zo ontstane 4 vergelijkingen de 4 onbekende constanten op te lossen. Afronding van een sterftetafel volgens Makeham heeft nog een belangrijk practisch nut, omdat het in staat stelt

bij vele vormen van verzekering op 2 levens van ongelijke leeftijd x en y zonder meer over te gaan op 2 levens van gelijke leeftijd z, bepaald door de formule:

$$c^x + c^y = 2c^z.$$

Ook bij de levensverzekeringswiskunde, evenals bij de intrestleer, geldt dat met vrucht van de continue methode gebruik kan worden gemaakt, indien met zeer kleine intervallen gewerkt moet worden. Voorts krijgen verschillende formules een andere gedaante. Koopsommen worden met integraalvormen uitgedrukt. Recursieformules voor het verband tussen de premiereserve na m jaar en $(m + 1)$ jaar gaan over in differentiaal- en integraalvergelijkingen enz.

Ten slotte beperkt voorts de wetenschap van de bezitter van diploma A zich in hoofdzaak tot de vaardigheid berekeningen uit te voeren aan de hand van *gegeven* grondslagen. Het *kiezen* van die grondslagen echter behoort niet tot zijn competentie. Bij de keuze der grondslagen moet er van worden uitgegaan, dat de maatschappij voor de eenmaal vastgestelde premie de nakoming der aangegane verplichtingen onvoorwaardelijk moet kunnen garanderen. Zij moeten dus aan de ruime kant worden gekozen, opdat er een veiligheidsmarge ontsta, maar men is daarbij uiteraard aan grenzen gebonden, daar anders het aangaan van de verzekering geen aantrekkelijkheid meer heeft. Voor het particuliere bedrijf, dat zijn klanten moet zoeken en overtuigen, geldt bovendien, dat er met andere bedrijven geconcurreerd moet worden. Voor instellingen met verplichte toetreding van verzekerden, bv. de sociale verzekering van overheidswege, verschillende pensioenfondsen e.d. komen weer andere overwegingen in het geding. Hier ligt een taak voor de beter geschoolde actuaris. Vooraf moeten de grondslagen worden gekozen, achteraf de gekozen grondslagen aan de ervaring getoetst, en het saldo van de winst- en verliesrekening zo goed mogelijk naar de verschillende bronnen van winst en verlies geanalyseerd.

Met name rond de keuze van de sterftegrondslag groeperen zich dan nog weer allerlei problemen, die onderwerpen van wetenschappelijke onderzoekingen kunnen zijn, zoals statistiek, waarschijnlijkheidsrekening, risicotheorie. Zij doen zich al terstond voor bij de afleiding van een sterftetafel uit het grondmateriaal, opdat dit zoveel mogelijk wordt gezuiverd van toevallige afwijkingen, die zich bij een verschijnsel als de sterfte gemakkelijk kunnen voordoen. De in eerste instantie gevonden sterftefrequenties vertonen een niet voldoende vloeiend verloop en moeten dus z.g. afgerond worden, waarvoor verschillende methoden in zwang zijn,

welke er echter weer niet toe mogen leiden, dat niet alleen de toevallige doch ook de essentiële afwijkingen worden weggestreken.

Ook bij de keuze van de rentevoet zal men zich naar de waarneming richten, welke echter weer leert dat de rentestand niet is een te allen tijde vaststaand gegeven doch met de tijd veranderend en mede afhankelijk is van de soort van belegging. Er moet dus ook een standpunt bepaald worden ten aanzien van de soort van belegging, die voor een levensverzekeringmaatschappij in aanmerking komt.

Bij de uitvoering van berekeningen is begrip nodig van de vereiste nauwkeurigheidsgrenzen. Bij de niet-wiskundigen, zelfs binnen het bedrijf wel, heerst soms het misverstand, dat als de wiskundige eenmaal een premie berekend heeft daarmede een wiskunstig-nauwkeurige waardering van het risico in kwestie is verkregen. De wiskundige zelf weet wel beter. Misschien wekt dit weer twijfel aan de betekenis van een berekening aan de hand van een stel wiskundig-afgeleide formules. De betekenis van die formules is echter vooral daarin gelegen, dat tussen de premiën voor verschillende verzekeringsvormen een verantwoord verband gelegd wordt. Evenals de wijze moet ook de actuaris tot zekere hoogte geklommen zijn om de ware betekenis van wat voor de jongere zonder meer zekerheden zijn te beseffen.

De actuaris, die zijn vak all-round wil beoefenen, kan echter niet bij wiskundige vragen blijven staan. Een levensverzekeringmaatschappij, en een pensioenfonds in zekere zin evenzeer, is een commerciëel bedrijf en haar verplichtingen zijn niet enkel door wiskundige gegevens bepaald, maar ook door bv. de polisvoorwaarden. Wederkerig zal bij de vaststelling van deze polisvoorwaarden met het wiskundig element zijn rekening te houden en zal daarbij dus de actuaris mede in een debat worden betrokken. Op de practijk van de bedrijfsvoering zijn weer allerlei andere invloeden werkzaam, bv. de fiscale politiek, en ook hiervan kan dus de actuaris zich niet afzijdig houden.

Het zal dus wel niet veel betoog behoeven, dat de wenselijkheid gevoeld werd aan de studie van hen, die zich voor beter werk dan simpelweg berekenen wensen te bekwamen, een zekere richting te geven. Met het oog hierop is afgelopen jaar een diploma B ingesteld, dat behalve hogere wiskunde en uitgebreidere kennis van intrestleer en verzekeringswiskunde ook economie en boekhouden, rechtswetenschap en fiscaal recht omvat. Het is niet noodzakelijk, dat de student in al deze onderwerpen tegelijkertijd examen aflegt; bedoeling is de stof over 5 afzonderlijke tentamina te verdelen.

De diploma's A en B zijn dus bestemd voor hen, die in de practijk werkzaam zijn. Met de studie voor deze diploma's zullen zeker verscheidene jaren gemoeid zijn, maar wie deze studie beëindigd heeft kan dan ook worden geacht theoretisch voldoende onderlegd te zijn om de problemen, die zich in het levensverzekeringbedrijf voordoen, te overzien. Eventuele nadere inlichtingen zijn te verkrijgen bij Dr B. Grootenboer, Leidseweg 2, Utrecht.

Daarnaast is echter ook gedacht aan de velen, die na een academische studie in de wis- en natuurkunde, een plaats in het verzekeringsbedrijf zoeken. Het ideaal, een soort verenigde faculteit van wiskunde, rechten en economie is nog niet bereikt, maar aan de Universiteit van Amsterdam is thans een studierichting mogelijk, die dit ideaal benadert. Er bestaat sinds dit jaar gelegenheid na het normale candidaatsexamen te doen een doctoraalexamen met hoofdvak wiskunde en bijvakken verzekeringswiskunde en economie, terwijl ook een tentamen boekhouden kan worden afgelegd. In dit verband is de benoeming van een hoogleraar voor de leer der collectieve verschijnselen (Prof. van Dantzig) van betekenis, terwijl de verzekeringswiskunde gedoceerd wordt door 2 bizondere hoogleraren, Prof. Campagne en Prof. Engelfriet. Bovendien bestaat vóór het candidaatsexamen gelegenheid het college elementaire verzekeringswiskunde te volgen, dat Prof. van Haaften aan de Vrije Universiteit geeft. De verwachting bestaat, dat zij die van deze nieuwe studierichting gebruik maken, niet op het levensverzekeringbedrijf zijn aangewezen (zij houden venzelfsprekend ook onderwijsbevoegdheid) maar dat allerlei andere instellingen eveneens een débouché zullen leveren: statistische bureaus, instellingen van sociale verzekering, schadeverzekeringsbedrijven waar de toepassing van actuariële methoden nog in de kinderschoenen staat, departementen enz.

Met nadruk moet ik er echter op wijzen, dat het bezit van diploma of academische graad niet beslissend is voor iemands bruikbaarheid in de practijk van het verzekeringsbedrijf. Een practische kijk op de zaken, organisatietalent en vermogen leiding te geven, commerciëel inzicht zijn zeker niet minder onmisbaar.

Ik ben hiermede gekomen aan het einde van wat ik me voorstelde U te vertellen. Ik hoop, dat niet velen Uwer van gevoelen zullen zijn, dat de vlag de lading niet dekte. Mijn bedoeling was in korte trekken Uw belangstelling te wekken zowel voor de wetenschappelijke inhoud van mijn vak als voor de practische beoefening daarvan en als U deze belangstelling zich herinnert wanneer Uw leerlingen om advies bij hun verdere plannen bij U aankloppen zal ik mijn streven ruimschoots beloond achten.

HOE HEBBEN DE OUDEN GEREKEND?

(Antwoord aan Prof. Dr H. Freudenthal)

door

E. M. BRUINS.

Het zij mij vergund hier te antwoorden op de op mijn werk geleverde critiek.

Vooraf echter deze opmerking:

Men zou door enkele uitspraken van de criticus mogelijk de indruk kunnen krijgen, dat ik bij de litteratuuropgaven belangrijke omissies heb begaan. Zeer sterk komt dit naar voren bij de opmerking over de lezing van aššu. Het ging in mijn artikel niet over philologische vragen, die, zoals hieronder nog zal worden aangegeven, voor de wiskundige interpretatie weinig betekenis hebben. De bekendheid met de standaardwerken van Neugebauer en Thureau Dangin mag overigens worden verondersteld bij een ieder, die op dit gebied werkzaam is. Dat dit het standpunt van de wiskundige kan en mag zijn, blijkt uit de volgende passages uit Neugebauers Vorwort MKT I, pag. VIII:

Die Uebersetzung soll aber nur ein allgemeiner Wegweiser sein, selbstverständlich genau genug um den Inhalt erfassen zu können, nicht aber um Feinheiten der Terminologie und Grammatik daran ablesen zu können . . . Dem Benutzer, der wirklich ueber diese Texte urteilen will, kann doch nicht erspart werden sich mit allen Einzelheiten vertraut zu machen . . .

Ik acht het evenmin nodig de litteratuuropgaven uit de beroemde bronpublicaties van Heiberg en Schöne te herhalen. Voor de kubiekwortels b.v. verwees ik naar Metrica III, 20. Daar wordt door Schöne verwezen naar het artikel van Curtze (Zsf. Math. Phys. 1897). De afleiding van Curtze bevat een evidente dimensiefout. Hierop heeft Kerber gewezen in een brief aan Curtze van Nov. 1897. Doordat Wertheim het door de criticus geciteerde artikel schreef is dit, in een Nachtrag, daar bekend gemaakt. Evenmin als Schöne in 1903 acht ik het thans nodig nadere verwijzingen te geven, te meer, daar het ook volgens de expliciete erkenning van de criticus, hier eèn bekende zaak betrof, die ik „for sake of completeness" toevoegde. Ik meen derhalve, dat mij op dit punt geen tekortkomingen mogen worden verweten.

Nu de zakelijke weerlegging van de critiek, waaraan het fundament met een enkele opmerking kan worden ontnomen.

De Duitse vertaling van Schöne bevat een ernstige vertaalfout. In de Griekse tekst loopt het betreffende in de indirecte rede gestelde citaat uit het werk van Archimedes *door* na de grote getallen met (in mijn vertaling):

> ; maar aangezien deze getallen niet geschikt zijn voor de metingen worden zij teruggebracht tot zeer kleine getallen, zoals (b.v.) 22 : 7.

Dit betekent, dat de in grote getallen gegeven grenzen slechts dienden om „zo iets als 22 : 7" af te leiden.

De weerlegging van de critiek voer ik echter hieronder ook onafhankelijk van deze opmerking.

Ik begin daartoe met enkele punten.

1. De omtrek van de omgeschreven regelmatige n-hoek voorstellende door O_n en die van de ingeschreven veelhoek door o_n, geldt voor een cirkel met straal 1:

$$O_{16} = 3{,}182598 \qquad o_{16} = 3{,}121445 \qquad O_{16} - o_{16} = 0{,}0615$$
$$O_{32} = 3{,}151724 \qquad o_{32} = 3{,}136548 \qquad O_{32} - o_{32} = 0{,}0151$$
$$O_{16} - \pi = 0{,}041 \qquad O_{32} - \pi = 0{,}010$$

terwijl

$$\frac{197\,888}{62\,351} = 3{,}17377 > 3^1/_6, \quad 0{,}032 \text{ groter is dan } \pi.$$

De conclusie, dat de bovengrens 197 888 : 62 351, door Heroon opgegeven, te dicht bij π ligt om de omtrek van de omgeschreven regelmatige 16-hoek te kunnen voorstellen, heb ik in „Euclides" getrokken, maar ik heb daaraan toegevoegd, dat een *zuivere schatting met behulp van de 32-hoek een veel nauwkeuriger waarde zou moeten opleveren*. Deze conclusie werd daar afgeleid, niet met decimale breuken, doch op een wijze, die ook voor de Griekse wiskundige voor de hand ligt [1]).

2. De ondergrens, door Heroon opgegeven, is

$$211\,875 : 67\,441 = 3{,}141634$$

en is dus ook groter [2]) dan π, terwijl het verschil der grenzen 0,0321 dus, in tegenstelling met de bewering van de criticus, groter dan 0,03 is. Het is verre van mij, om uit het verschil tussen een correct liggende bovengrens en een als ondergrens opgegeven bovengrens iets over de nauwkeurigheid der gebruikte methode te willen concluderen. Slechts dit ene zou juist zijn: *het verschil tussen de grenzen van Heroon is meer dan tweemaal groter dan de correcte grenzen bij de 32-hoek mogen opleveren.*

---

[1]) Liever dan een verkapte ontwikkeling

$$n\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\right] = \frac{\pi^3}{2n^2}\left[1 + \frac{\pi^2}{4n^2} + \ldots\right] = \frac{15{,}5067}{n^2}\left[1 + \frac{2{,}4674}{n^2} + \ldots\right]$$

schrijf ik aan Archimedes de *exacte* bepaling van de afwijking uit

$$A_n : a_n = \varrho_n : R \text{ door } (\varrho_n - R) : R \text{ toe.}$$

[2]) Merkwaardigerwijze begint de kettingbreukontwikkeling met 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$.

3. Neemt men aan, dat de tekst van Heroon juist is, wat betreft de correct liggende bovengrens, dan moet het gebruik van een veelhoek met meer dan 32 zijden buitengesloten worden beschouwd. De schatting is dan een *oudere* dan die uit Dimensio circuli. Niemand zal toch nà de nauwkeurige schatting van de 96-hoek nogmaals een slechtere met een minder dan 32 zijden tellende veelhoek berekenen. Dit heeft allereerst tot gevolg, dat de bovengrens niet zonder meer historisch fout kan worden genoemd en verder óók, dat dit resultaat reeds verkregen *kan* zijn in een veel vroeger stadium der wiskundige ontwikkeling van Archimedes.

4. Het is een misvatting, dat grote getallen in de Griekse wiskunde *steeds* duiden op een grote nauwkeurigheid: deze kunnen ontstaan, door het op gehele getallen reduceren van een in breuken gegeven verhouding. Voor Heroons opgaven is hiervoor nog een bewijsplaats in Metrica II, 18. Daar wordt de verhouding van ribbe tot straal-ingeschreven-bol van een icosaeder aangegeven als 127 : 93 = 1,36559. De nauwkeurige waarde begint decimaal geschreven met 1,323169 waaruit volgt, dat

1. 4 : 3 een *vier*maal groter nauwkeurigheid (0,010),
2. 41 : 31 een ruim *zeventig* maal groter nauwkeurigheid (0,00058) zou leveren. De kettingbreuk begint met

$$\frac{4}{3}, \frac{41}{31}, \frac{45}{34}, \frac{86}{65}, \ldots$$

dus een keur van zeer belangrijk betere waarden met „minder cijfers" geschreven.

5. $\frac{1093}{773} = 1,41397 \ldots \quad \sqrt{2} = 1,41421 \ldots$ afwijking 0,00024.

De nauwkeurigheid van de breuk wordt door de criticus veel te laag opgegeven.

Daarbij komt, dat in de reeks van de vierhoek bij de eerste benadering de verhouding $(R + \varrho_4) : A_4 = 1866 : 773$ een rol speelt, die zoals evident is, de waarde $1 + \sqrt{2}$ met een procentuele fout van 10^{-4} oplevert, welke dus zelfs na vermenigvuldiging met 16, nimmer een fout groter dan $1,6^0/_{00}$ kan veroorzaken.

Een bezwaar van de gegeven critiek, waarop ik in verband hiermede meteen stoot, is, *dat de criticus vele formules en schattingen opgeeft, die in mijn werk niet voorkomen en zelfs niet voor kunnen komen.* Zo is bij voorbeeld zijn voorstelling van de bovengrens

van Heroon totaal niet in overeenstemming met de door mij opgegeven becijfering, die uitgedrukt wordt door

$$\frac{197\,888}{62\,351} = \frac{256 \times 773}{1866\left[33 + \frac{773}{1866}\right]} = \frac{16 \times 773}{1866\left[2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{2639}{1866}\right]}.$$

Hierin is 2639 : 1866 = 1,414255 een benadering van $\sqrt{2}$ op 4.10^{-5} nauwkeurig.

Hiermede is enerzijds wel reeds duidelijk gemaakt, dat de nauwkeurigheidsbeschouwingen van de criticus elke grond missen en anderzijds, dat een voortgezette puntsgewijze weerlegging meer plaatsruimte zou eisen dan de geleverde critiek verantwoord doet zijn. Ik beperk mij derhalve verder tot een paar hoofdpunten, die naar mijn mening de volledige weerlegging van de critiek inhouden.

A. De Grieken schreven de getallen met lettersymbolen en wel

1—9	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ
10—90	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
100—900	ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
1000—	͵α, . . .								
10000	M								

Men schrijve nu 7, 77, 773, 10, 109, 1093 in deze symbolen

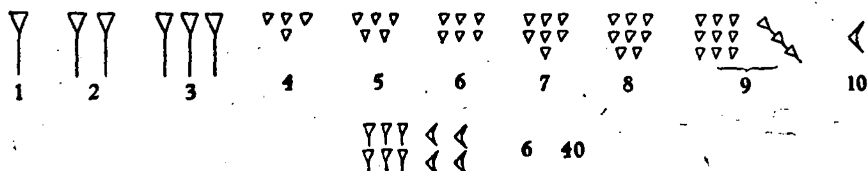
ζ οζ ψογ ι ϱϑ ͵αϙγ

om onmiddellijk in te zien:

1. dat het tellen van het aantal symbolen voor de Griekse notatie zinloos is; grotere getallen kunnen belangrijk minder symbolen vereisen dan kleine;
2. dat het wegschrappen van het laatste symbool niet automatisch door 10 delen levert;
3. dat behoudens multiplicatie met 10, die eenvoudig geschieden kan, een vermenigvuldiging zo mogelijk moet worden vermeden;
4. dat het ongeoorloofd is conclusies voor decimale breuken over te dragen op de Griekse schrijfwijze, zodat een weergave in moderne cijfers slechts het verloop en niet de uitvoering der berekeningen kan betreffen;
5. dat in de Griekse tekst en bij de Griekse schrijfwijze de gebruikte aantallen symbolen der in mijn artikel optredende getallen *overal afwijken van de door de criticus opgegeven aantallen.*

Ik merk verder nog op, dat Archimedes in de Zandkorrelrekening vóór alles de getallen vergelijkt met die der rij 1, 10, 100, 1000, . . ., terwijl mijn hoge waardering voor de praestaties der Grieken naar mijn mening onomstotelijk vaststaat door de keuze van het motto: „Jeder sei auf seine Art ein Grieche, aber er sei's".

B. 1. De Babyloniërs schreven de getallen sexagesimaal en verder als volgt:



De opvatting, dat een getal *naast* een figuur een lengte en *in* een vlakke figuur een oppervlakte voorstelt is overbekend. De in de betreffende tekst reeds tweemaal opgetreden rechthoek heeft de zijden 40′ en 10′, dus een oppervlakte 400″ = 6′40″. De onmiddellijk volgende vraag bevat een figuur, waarvan de rechthoeksvorm wel evident is. Een der zijden is weer 40′, terwijl de tablet afbreekt door een getal, dat *in* de figuur staat (zie fig. 1, een cm links boven het getal 15). De uitspraak: „On the rupture we see the upper half of 6′40″, the aerea . . ." is dus volmaakt in overeenstemming met de feiten. Voor de conclusie is echter slechts belangrijk, *dat er een getal* in *de figuur staat.* Welk getal dit is, doet niet ter zake [1]).

2. Ik acht het onmogelijk, dat een Babylonisch wiskundige, die de stelling van Pythagoras kent en dus zeker de 3-4-5-driehoek ontmoet heeft, de oplossing van het vraagstuk der berekening van de diagonaal van een rechthoek met de zijden 3 en 4 zou beginnen met „aššu la tidu" in de letterlijke betekenis „Aangezien je (hem) niet kent", want dat is *beslist niet waar.* Ziet men de gegeven tekst als een demonstratie van methoden (o.a. aan de 3-4-5-; 5-12-13-; 8-15-17-; 20-21-29-driehoek) dan levert de feitelijke toestand: „Laten we doen alsof we hem niet kennen". Hoe vaak doet ook in de tegenwoordige tijd de leraar niet iets dergelijks? Daarom vertaalde ik hier: „Stel, dat je hem niet kent". Bovendien is de lezing „aššu" hier van zeer ondergeschikt belang. Het „la tidu",

---

[1]). De criticus had in plaats van „het eerste getal kan een der cijfers 4—9 zijn" moeten schrijven 3—9, zoals uit het hier opgemerkte blijkt.

„je weet niet", sluit de mogelijkheid van „op het antwoord werken" uit [1]).

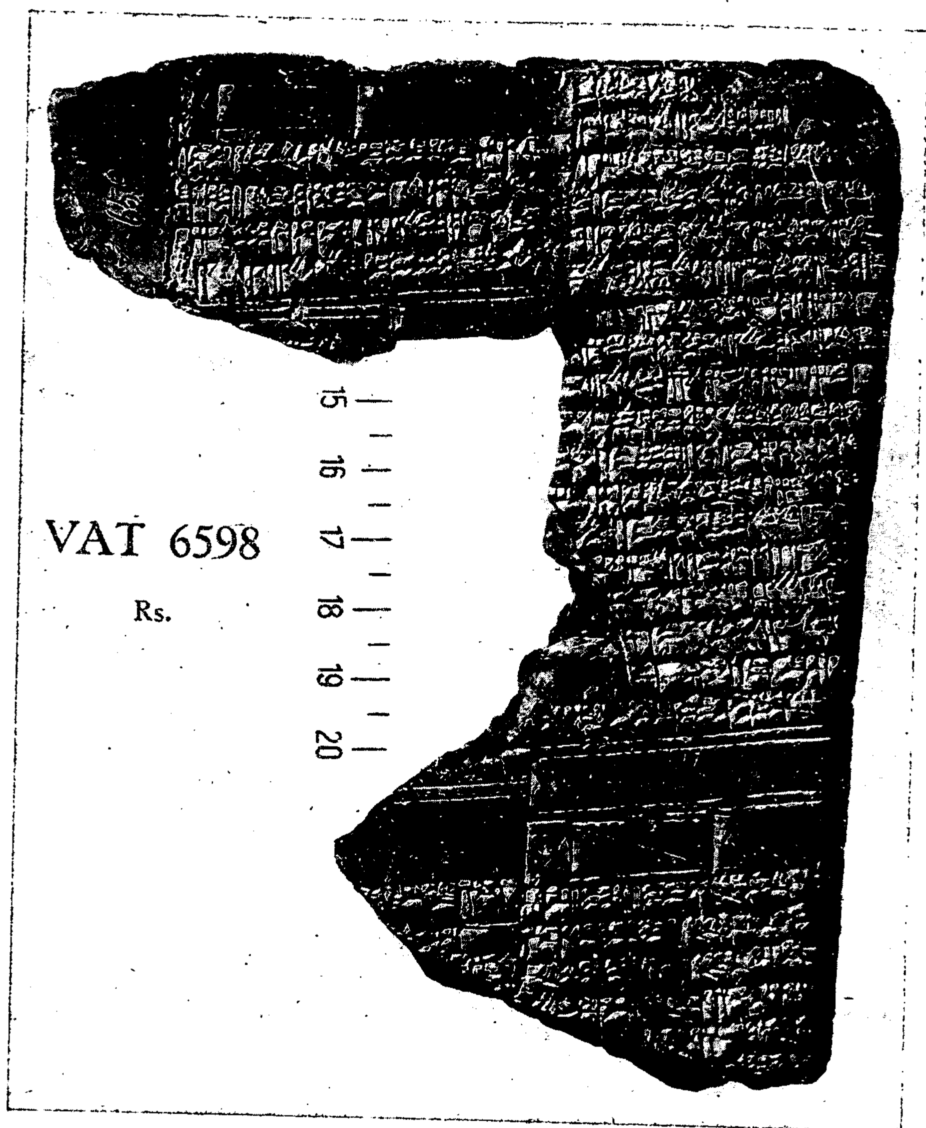


Fig. 1.

[1]) De onderstelling, dat ik „Attendu que tu ne (la) connais pas" niet juist uit het Frans zou hebben vertaald, komt mij absurd voor. Sterker nog: daar het hier een stereotype zin betreft, waarmede nagenoeg alle oplossingen op deze tablet beginnen, een zin, die ook op andere tabletten voorkomt, staat welhaast zonder transcriptie, akkadiseering en vertaling vast, dat dit een uitdrukking is, die evenals

De interpretatie, dat een algemene methode wordt gedemonstreerd, die in moderne symbolen luidt:

$$\left.\begin{array}{l} d = \sqrt{a^2 + b^2} = a + \frac{1}{\lambda} b \\ \text{Zoek } \lambda \text{ met } \lambda - \frac{1}{\lambda} = \frac{2a}{b} \text{ uit de reciprokentafel} \end{array}\right\}$$

vindt m.i. steun in het feit, dat analoge vragen, onder meer in de onmiddellijk volgende vraag: $d = 5$, $a = 4$, wat is b? gewoon met de stelling van Pythagoras worden opgelost. Ik heb nu de opmerking gemaakt, dat als $a > b$, evident is, dat ($\lambda > 1$!)

$$\frac{2a}{b} + 1 > \lambda > \frac{2a}{b}$$

hetgeen leidt tot de verscherping van

$$a < d < a + b$$

tot

$$a + \frac{b^2}{2a + b} < d < a + \frac{b^2}{2a}.$$

De boven-grens, de Heroon-formule, was reeds uit VAT 6598 bekend. De onmiddellijk volgende opgave over de berekening van de diagonaal van een rechthoek met de zijden 40′ en 10′ scheen het voorschrift

$$d = 40' + 2 \times 40' \times 10' \times 10' = a + 2ab^2$$

te bevatten. Het eindresultaat is slechter dan de bovengrens van Heroon, uit de voorafgaande oplossing. Daar ik de Babyloniërs hoog aansla, leek het mij onmogelijk, dat een volgende methode *alleen* een slechtere waarde zou leveren, èn, dat de Babyloniër een formule gebruikte, die wat de dimensies betreft, niet klopt. Nu bestaat mijn opmerking hierin, dat $2a + b$ hier $90' = 1°30'$ is, waarvan de reciproke waarde 40′ is, zodat de formule voor de bovengrens zou luiden:

$$d < a + \frac{2b^2}{2a + b}.$$

Maar dan zou het voorschrift volledig geweest zijn

$$a + \frac{b^2}{2a + b} < d < a + \frac{2b^2}{2a + b}.$$

het „tp-n-ir-t" = „voorbeeld van werkwijze" uit de papyrus van Moskou en het „nepešum" = „werkwijze" op andere spijkerschrifttabletten, een methode tot oplossing aangeeft. Neugebauer transcribeert *la idu* = šumerisch nu-zu en vertaalt naar de zin: „Die Grösse ist nicht bekannt".

De schrijver, die elders op de tablet een gedeelte tweemaal schrijft (een vaak voorkomende afschrijffout) *heeft hier een regel overgeslagen* (een wellicht nog vaker voorkomende afschrijffout). Hierdoor wordt het geheel door elkaar gehaald. *Deze gedachtengang is de criticus blijkbaar ontgaan,* hoewel zeer duidelijk te lezen staat: The full solution had to proceed having calculated 1'6''40'''. Add to 40' — the altitude — 41'6''40''' — or double 2'13''20''' and add to 40' — the altitude — 42'13'20''' thus giving **both** bounds for d.

3. Het gegeneraliseerde harmonisch gemiddelde bij de multiplicatieve methoden der Grieken concludeert uit

$$a < d < \beta$$

tot

$$d > \frac{a\beta + d^2}{a + \beta}$$

en ik vermeldde hierbij uitdrukkelijk: This is identical with the Babylonian formula. Inderdaad, voor $\beta = a + b$ wordt dit

$$d > \frac{a^2 + ab + d^2}{2a + b} = a + \frac{d^2 - a^2}{2a + b},$$

terwijl de Babylonische formule luidt

$$d > a + \frac{b^2}{2a + b} = a + \frac{d^2 - a^2}{2a + b}$$

Zó en slechts zo verkrijgt men identische formules voor de verscherping van de eerste benadering

$$a < d < a + b$$

die — in de Griekse wiskunde *multiplicatief*, in de Babylonische wiskunde door *additie van quadraten* — op *verschillende* wijze verkregen wordt. Ook dit is de criticus blijkbaar ontgaan.

In mijn ogen is het een ontoelaatbare verwisseling van postquam en antequam, die slechts verwarrend werken kan, om op de formule der Arabieren

$$d > a + \frac{d^2 - a^2}{2a + 1}$$

in dit verband te wijzen — een formule, die bovendien niet de algemene gedaante heeft.

C. De gedachtengang voor $\pi < 197\,888 : 62\,351$.

Aan de hierboven reeds gemaakte opmerkingen moet worden toegevoegd, dat bij de methode van Dimensio circuli de noemer

van de naderende breuk voor de ten grondslag liggende irrationaliteit door de gehele berekening behouden kan blijven — en bij slechts twee stappen is dit zeker — om dan bij de laatste stap met het aantal zijden van de veelhoek vermenigvuldigd te worden. Ik ontbond dus 197 888 in priemfactoren en vond slechts de factoren 2 en 773. De uitspraak van Heroon, dat de grenzen voorkomen in een verhandeling „Over blokken en cylinders" bevestigt de mogelijkheid van de reeks van de vierhoek.

Is 773 de noemer van $\sqrt{2}$, dan moet 1093 de teller zijn. De eerste stap volgens Dimensio circuli zou dan zijn

$$A_4 = R = 773 \quad A_8 : R = A_4 : (R + \varrho_4) = 773 : 1866.$$

Ik deelde nu de noemer 62 351 door 1866 en vond het quotient 33 en de rest 773! Dus

$$\frac{197\,888}{62\,351} = \frac{16 \times 16 \times 773}{1866\left[33 + \frac{773}{1866}\right]}.$$

Mijn derde opmerking was nu $33 = 2 \,.\, 16 + 1$, zodat, daar de volgende stap zou zijn,

$$A_{16} : R = A_8 : (R + \varrho_8)$$

en

$$R + \varrho_8 = 2R + (\varrho_8 - R)$$

een sluitende verklaring wordt, dat het stukje t (fig. 2)

$$t = \varrho_8 - R = \tfrac{1}{16}\,(R + A_8)$$

gesteld is. Nu is geometrisch evident (men trekke slechts de tweede raaklijn uit het eindpunt van de bissectrice) dat

$$R + A_8 = \varrho_4.$$

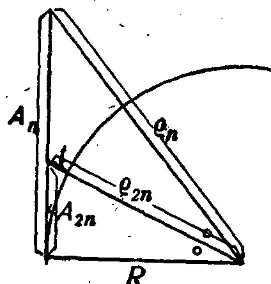


Fig. 2.

t wordt dus vergeleken met ϱ_4. Van geometrisch standpunt is deze voorstelling dus zo dwaas niet. R en ϱ_4 zijn onder- en bovengrens voor alle ϱ_n!

Nu rekent men gemakkelijk na

$$\frac{1}{16}(R + A_8) > t > \frac{1}{17{,}2}\,(R + A_8),$$

waaruit ik de conclusie trok: er is geen sprake van een nauwkeurige benadering, maar van een ruwe voorlopige schatting.

Er wordt geen rekenfout gemaakt [1]) maar bewust en zuiver geschat, een hogere nauwkeurigheid wordt niet nagestreefd!! De vervanging van 17,2 door 16 verkleint de waarde met minder dan 3,1°/$_{00}$ (minder dan 12 op 3885) dus ver binnen de te verwachten afwijking van O_{16} en π van omstreeks 1%. Men vergete niet, dat π en niet O_{16} geschat moet worden! Het zou een inconsequentie van de criticus zijn wel te onderstellen, dat Archimedes zich vóór alles bewust heeft gemaakt van de bereikbare nauwkeurigheid en hem nu te verbieden daarvan gebruik te maken. Er wordt integendeel zeer voorzichtig te werk gegaan. Zelfs een vervanging door 13 (12,89) levert nog een bovengrens! *De criticus spreekt over een effect, dat ver binnen de beraamde nauwkeurigheid ligt. Dit is geen rekenfout, maar eerder een bewijs van grote bekwaamheid van Archimedes.*

Blijft de verklaring van de noemer 773 in

$$\frac{1093}{773} < \sqrt{2}.$$

Dit eist geen tijdrovende, onpractische berekeningen. Door het weglaten van de „tussenberekeningen" is de methode door de criticus onherkenbaar gemaakt. *Zij bestaat in het naar elkaar toebrengen van noemers, correctie van tellers en overgang op een tienmaal grotere noemer. De methode is zuiver additief.*

$$\sqrt{2} < \frac{10}{7} \text{ (b.v. Heroon, Metrica II, 17)}, \quad \frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{10}{7}$$

is evident. Gaat men over op tienmaal groter noemer, bij de laatst gevonden breuk

$$\frac{110}{80} < \sqrt{2}$$

dan moet de noemer *verkleind* worden. Niet door tijdrovende en onpractische vermenigvuldigingen maar eenvoudig zo:

$$110^2 = 12100 \quad 80^2 = 6400 \quad 79^2 = 6400 - 159 = 6241$$
$$78^2 = 6241 - 157 = 6084 \quad 77^2 = 6084 - 155 = 5929$$

dus
$$\frac{110}{78} < \sqrt{2} < \frac{110}{77}.$$

$$12100 - 219 = 11881, \text{ dus } \frac{110}{78} < \sqrt{2} < \frac{109}{77}.$$

---

[1]) Wanneer de criticus mijn opmerking „17 was beter" vervangt door zijn uitspraak „17 was goed" (pag. 17) vervangt hij mijn juiste uitspraak over *t* door een foutieve van hem.

Een kundig rekenaar zal wegens 3.160 > 3.140 > 400 dit laatste resultaat onmiddellijk verkrijgen. In totaal zijn dan nog 6 addities van eenvoudige getallen nodig om als eerste goede benadering

$$\frac{1093}{773} < \sqrt{2} < \frac{1092}{772}$$

te verkrijgen. De door de criticus opgegeven breuken worden door deze methode *automatisch gepasseerd*: zij liggen *buiten* of *veel verder* in het schema. De methode komt mij voor die van een bekwaam rekenaar te zijn. Met verbluffing heb ik de inderdaad tijdrovende, onpractische en niet ter zake doende becijferingen van de criticus gezien.

Opmerking I. Dimensio circuli.

Het numeriek rekenen vraagt gebruik te maken van alle reeds verkregen resultaten en niet een steeds opnieuw beginnen. Houdt men rekening met het boven reeds aangegeven vermijden van multiplicaties en houdt men het belang van verdubbelen, halveren en vertienvoudigen voor het numeriek rekenen van alle tijden in het oog, dan mag de criticus **mij** in ernst niet een rekenwijze toeschrijven (die Heath, Works of Archimedes, 1897 wel schijnt te volgen):

$$\sqrt{349450}, \quad \text{nulde benadering 591 enz.}$$

Uit $d^2 = 571^2 + 153^2 = 349450$ volgt $a = 591$ als $571 + (10 + 10) = 571 + 20$.

$571^2 = 326041$ is reeds bekend. Maar dan is

$$591^2 = 32\,6041 + 400 + 22\,840 = 34\,9281.$$

Verschil 169 met d^2 en dus daar $2 \times 591 + 1 = 1183$

$$d > 591\tfrac{169}{1183} = 591\tfrac{1}{7} > 591\tfrac{1}{8}.$$

Het rekenen met $591\frac{1}{7}$ zou de berekeningen nodeloos compliceren (vgl. o.a. Heath, loc. cit.). Analoog ontstaan de overige benaderingen:

$$1172 = 1162 + 10 \qquad 2339 = 2334 + 5.$$

Er komen in de gehele Dimensio circuli slechts twee tweede orde benaderingen

$$3013 = 2911 + 100 + 2 \qquad 1838 = 1823 + 10 + 5$$

voor. Het is duidelijk, dat $a(a + 1)$ *niet* berekend behoeft te worden: men gaat door met triviale multiplicaties tot men minder dan de basis a van d^2 verschilt.

Het berekenen van een Heroongrens en deze aan een correctie tot een ondergrens te onderwerpen, zoals de criticus voorstelt, vereist multiplicatieve controle berekeningen. Waar dat toe leidt, demonstreert Eutochius commentaar ons duidelijk! Dit voorstel van de criticus is dus hier zonder meer te verwerpen [1].

Opmerking II.

Het aanplakken van cijfers is volgens de criticus ongrieks. Ik meen het tegendeel en noem enkele bewijsplaatsen:

Heroon Metrica I, 18;

$a^2 = 5b^2 \quad [5:1 = 80:16] \sim 81:16$ en $a:b \sim 9:4$,

Heroon Metrica I, 22;

$a^2 = 8b^2 \quad [8:1 = 288:36] \sim 289:36$ en $a:b \sim 17:6$,

Heroon Metrica III, 1; $a^2 = 126\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} \qquad a = 11\frac{1}{4}$,

Heroons formule levert hier

$$11 + \frac{5\frac{3}{4}}{22} = 11 + \frac{23}{88} \sim 11\frac{22}{88} = 11\tfrac{1}{4}.$$

Dat hier de *tweede* naderende breuk van een kettingbreuk zou zijn berekend is voor mij onaanvaardbaar.

Heroon Metrica I, 20; $a^2 = 207 \qquad a = 14\frac{1}{3}$.

Heroons formule levert hier op zijn gunstigst $14\frac{12}{30} \sim 14\frac{1}{3}$. De waarde $14\frac{2}{5}$ is niet slechts beter, maar zelfs gunstiger voor het verder verloop der becijfering.

Na deze voorbeelden [2] mag een kettingbreukspecialist in verrukking gebracht worden door

$$7921 : 4050 > 88 : 45$$

omdat de laatste breuk de *vijfde* benaderende breuk van de kettingbreuk voor 7921 : 4050 is, voor de Grieken, zowel als voor elke rekenaar, lijkt mij eenvoudiger

$$7921 : 4050 > 7920 : 4050 = 88 : 45.$$

---

[1] „Het ligt voor de hand, en tot nu toe heeft er nooit iemand aan getwijfeld . . ." zegt de criticus op pag. 29. Dat dit onjuist is, blijkt afdoende uit het door Heiberg geciteerde Heath, Works of Archimedes, introduction, 1897. Zelfs als „nu" ver vóór 1897 gekozen wordt, blijft de opmerking van de criticus onjuist.

[2] Wil men de termen *ἀνταναίρεσις* en *ἀνθυφαίρεσις* óók op de breukrekening toepassen, dan bedenke men, dat o.m. *αἱρεω* = wegnemen, *ἀναιρεω* = opnemen en wegdragen, *ὑφαιρεω* = (heimelijk) wegnemen betekenen, terwijl *ἀνταναιρεω*, *ἀνθυφαιρεω* aan beide zijden balancerend wegnemen is. Een iteratieve betekenis is aantoonbaar. Wijst dit er dan niet op, dat de Griek niet alleen het aanplakken en wegnemen van grootheden toepaste, maar dit ook door een zeer gecompliceerde naamgeving aanduidde?

D. Over de werkwijze.

Hierbij richt ik mij naar de vooral door Neugebauer geaccentueerde richtlijnen:

I. Geen bewering zonder bewijsplaats tot steun.

II. Geen interpretatie mag als vaststaand worden aangenomen, zolang er een tweede met de feiten overeenstemmende verklaring mogelijk is.

De triviale, eenvoudig additief uitgevoerde, schatting $\pi > 3\frac{10}{71}$, met één multiplicatie met 7 en één additie, uitgaande van $\pi < 3\frac{1}{7}$, beschouw ik als meer voor de hand liggend, in verband met de hier opgegeven bewijsplaatsen uit Heroon over het „aanplakken van cijfers", dan de met *divisoren* $284\frac{1}{4}$, $27\frac{1}{2}$ als *tweede* naderende breuk met een kettingbreuk te verkrijgen waarde $\frac{10}{71}$, *waarbij ook nog de kettingbreukmethode „hineininterpretiert" moet worden.*

De eis II heeft verstrekkende gevolgen. Ik herinner aan het beroemde voorbeeld uit de Moskou-papyrus door Struve geïnterpreteerd als de berekening van de oppervlakte van de halve bol, waarin de beschrijving van de halve bol wel zeer sterk overeenkomt met die uit 2 Kron. 4 : 2. Deze uitlegging mag niet als vaststaand worden beschouwd, omdat Peet een interpretatie van een onbekende uitdrukking heeft voorgesteld, die een correcte berekening van een andere oppervlakte levert. Dat, naar veler meening, de zin van het door Peet's lezing geleverde oppervlak zoek is, doet hierbij niet ter zake.

Een gevolg van de boven gegeven sluitende interpretatie van de tekst van Heroon: deze maakt het vrijwel zinloos een interpretatie te zoeken onder veronderstelling van schrijffouten, iets waar men reeds lang vruchteloos naar heeft gezocht. Eén dergelijke interpretatie kan zich niet als *de* juiste doorzetten.

Toevoeging I. Kettingbreuken.

Een ander gevolg is, dat de kettingbreukmethode, hoe dan ook, nimmer meer als de algemeen geldende voor de Griekse wiskunde kan worden aangenomen. Steeds zal een „balancerend wegnemen" de verwachte kettingbreukapproximatie sneller leveren, als de methode niet uitdrukkelijk aangegeven is.

Het optreden van naderende breuken van kettingbreuken betekent slechts, dat men een goede benadering gevonden heeft.

Volledigheidshalve voeg ik voor de quadraatwortels nog toe, dat men naast de geometrische afleiding van zijde- en diagonaalgetallen ook geometrisch eenvoudig de kettingbreukreeks voor $\sqrt{3}$ verkrijgt, waaruit voor andere getallen onmiddellijk een methode

verkregen wordt, die, met steeds groter teller en noemer, een steeds betere benadering levert en waarbij zelfs de gedachte aan een kettingbreuk: „afnemen, gaat zoveel maal, afnemen, . . .'' niet kan optreden.

Een ἀνταναρσις gebaseerd op een zuivere ἀνταναιρεσις!

$\sqrt{2}$. $\Delta ABC \backsimeq DBC$ (fig. 3)

$$d_{n+1} = 2a_n + d_n$$
$$a_{n+1} = a_n + d_n$$
$$d^2_{n+1} - 2a^2_{n+1} = -(d_n^2 - 2a_n^2)$$

$d_0 = a_0 = 1$ $\sqrt{2}$:

1	3	7	17	..
1	2	5	12	..

„de kettingbreuk''

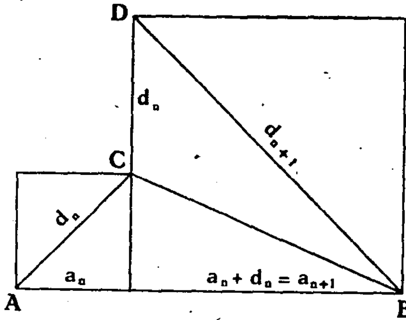


Fig. 3.

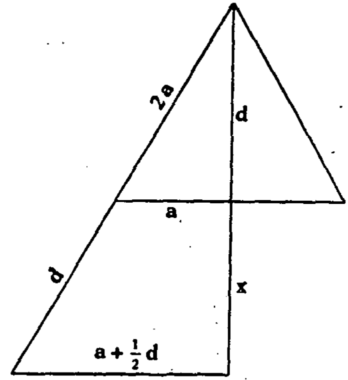


Fig. 4.

$\sqrt{3}$. $d : a = (d + x) : (a + \frac{1}{2}d)$ (fig. 4)

$$d + x = \frac{ad + \frac{1}{2}d^2}{a} = d + \frac{3}{2}a$$

$$d : a \rightarrow (2d + 3a) : (2a + d)$$

$d_0 = a_0 = 1$

1	5	19	71	265	989
1	3	11	41	153	571

$d_n^2 - 3a_n^2 = -2$

$d_0 = 2$ $a_0 = 1$

2	7	26	97	362	1351
1	4	15	56	209	780

$d_n^2 - 3a_n^2 = +1$

$\sqrt{N}$. $d^2 = Na^2$ $d : a \rightarrow (\lambda d + \mu a) : (\varrho d + \sigma a)$ dus $\varrho d^2 + \sigma ad = \lambda ad + \mu a^2$, waaruit voor $\lambda = \sigma$, met letterlijke ἀνταναίρεσις, volgt $\mu = N\varrho$ dus

$$d : a \rightarrow (\lambda d + Na) : (d + \lambda a).$$

Nu is

$$(\lambda d + Na)^2 - N(d + \lambda a)^2 = (\lambda^2 - N)(d^2 - Na^2).$$

Is dus $\lambda^2 - N = 1$ dan blijft „het verschil constant"; is $\lambda^2 - N < 1$ dan convergeert de rij naar $\sqrt{N}$.

Voorbeelden.

$$\sqrt{5}. \quad \lambda = 2 \quad d_o = 2 \quad a_o = 1 \quad \begin{array}{c\|\|ccc} 2 & 9 & 38 & 161 \\ 1 & 4 & 17 & 72 \end{array} \quad \text{„de kettingbreuk".}$$

$$\sqrt{6}. \quad \lambda = \tfrac{5}{2} \qquad d : a \rightarrow (5d + 12a) : (2d + 5a)$$

$$\left.\begin{array}{ll} d_o = 5 \;\; a_o = 2 & \begin{array}{c\|\|ccc} 5 & 49 & 485 & .. \\ 2 & 20 & 198 & .. \end{array} \\ d_o = 2 \;\; a_o = 1 & \begin{array}{c\|\|ccc} 2 & 22 & 218 & .. \\ 1 & 9 & 89 & .. \end{array} \end{array}\right\} \quad \text{„de kettingbreuk".}$$

Toevoeging II.

Tenslotte enige opmerkingen over de berekening van de inhoud der regelmatige veelvlakken door Heroon — Metrica II, 16—20 — tot verdere steun van mijn betoog.

a. Het regelmatig viervlak ABCD krijgt een ribbe $CD = 12$ toegewezen. DE is de hoogte en de straal van de omgeschreven cirkel van het grondvlak ABC, CE voldoet aan $3CE^2 = CD^2$ dus $CD^2 = 1\frac{1}{2}\,DE^2$.

Uit $CD = 12$ volgt dus nu — daarom is 12, een drievoud, blijkbaar gekozen — zonder meer

$$DE^2 = 96 \qquad DE = [9 + \tfrac{15}{18}] = 9\tfrac{1}{2}\,{}^{1}/_{3}.$$

b. Het regelmatig achtvlak daarentegen krijgt een ribbe 7. Het quadraat van de lichaamsdiagonaal d levert het dubbele van het quadraat van de ribbe

$$d^2 = 98 \qquad d \backsim 10.$$

Waarom niet $d = 9\frac{17}{18}$? Eenvoudig, omdat dit Heroons bedoeling niet is. Een paar regels te voren toont hij bij $\sqrt{96}$ aan, dat hij beter kan! Metrica I, 9 stelt hij evenmin $\sqrt{63} = 8$ maar

$$8 - \tfrac{1}{16} = 7\,{}^{1}/_{2}\,{}^{1}/_{4}\,{}^{1}/_{8}\,{}^{1}/_{16}!$$

Er is hier vanzelfsprekend geen sprake van een rekenfout, maar bewust wordt $d = 10$ gesteld. En de keuze van de ribbe 7 vindt haar oorzaak in de niet in de rij der zijde en diagonaalgetallen voorkomende benadering

$$\sqrt{2} < \tfrac{10}{7}.$$

c. Bij het twintigvlak en het twaalfvlak wordt de ribbe $a = 10$ gesteld.

Nu is voor het twintigvlak de straal r van de ingeschreven bol modern geschreven

$$a = \sqrt{42 - 18\sqrt{5}} \, . \, r$$

waaruit evident is, dat een kleine fout in $\sqrt{5}$ in het eindresultaat sterk vergroot wordt. Analoog aan het voorgaande zou volgens (fig. 5)

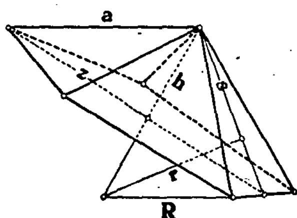


Fig. 5.

$$\left.\begin{array}{l} R^2 - s^2 = r^2 \\ a^2 = 2hR \\ h^2 + z^2 = a^2 \\ 3s^2 = a^2 \\ 5z^4 - 5a^2z^2 + a^4 = 0 \end{array}\right\} \text{ waaruit}$$

$$r^2 = R^2 - s^2 = R^2 - \tfrac{1}{3}a^2$$

dus

$$r^2 : a^2 = (3a^2 - 4h^2) : 12h^2 =$$
$$(4z^2 - a^2) : 12(a^2 - z^2).$$

Men kan nu met behulp van de betrekking tussen z^2 en a^2 de laatste verhouding door een rij andere vervangen, b.v. door multiplicatie met z^2 door

$$(15z^2 - 4a^2) : 12a^2.$$

De andere mogelijkheid, multiplicatie met a^2 levert voor fouten in $\sqrt{5}$ steeds gevoeliger waarden. Kies nu

$$\sqrt{5} = {}^9/_4 \quad \text{dan is} \quad 9(z^2 - \tfrac{1}{2}a^2) = 2a^2, \quad z^2 = \tfrac{13}{18}a^2.$$

Volgens de tweede verhouding is dan

$$r^2 : a^2 = (15 \times 13 - 4 \times 18) : 12 \times 18 = 41 : 72 = 82 : 144$$
$$r : a = 9^1/_{18} : 12 > 3 : 4.$$

En zelfs de eerste verhouding levert

$$r^2 : a^2 = (4 \times 13 - 18) : 12 \times 5 = 34 : 60 = 68 : 120 \backsim 68 : 121$$
$$r : a \backsim 8^1/_4 : 11 = 33 : 44 = 3 : 4.$$

Kort en goed, het is vrijwel onmogelijk de eerste benadering $a = {}^4/_3 r$ te missen.

De door Heroon opgegeven waarde $a : r = 127 : 93$ is met veel cijfers onbegrijpelijk slecht [1]).

[1]) Ik merk nog op, dat als men de door Heroon opgegeven waarde schrijft als $a : r = 127 : 93 = 42^1/_3 : 31$, men door terugwerken komt op een breuk $\frac{52}{73}$ voor $z^2 : a^2$. Dit kan op een geoorloofde afrondingsfout neerkomen van $\frac{52}{72} = \frac{13}{18}$. Deze $\frac{13}{18}$ is namelijk een bovengrens van $z^2 : a^2$.

d. Voor het twaalfvlak is de modern geschreven waarde

$$r = \sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{80}}a = 1{,}1135164a.$$

De analoge methode levert hier direct

$$r^2 : a^2 = d : 4(7d - 11a)$$

als d de diagonaal en a de zijde van een regelmatige vijfhoek voorstelt, dus $d^2 = a^2 + ad$ waaruit (vgl. Metrica I, 18, slot) b.v. voor $\sqrt{5} = \frac{38}{17}$ ontstaat

$$d = \tfrac{55}{34}a \qquad r^2 : a^2 = 55 : 4(385 - 374) = 5 : 4$$

$$r : a = \sqrt{4 \times 5} : 4 \backsim 4\tfrac{1}{2} : 4 = 9 : 8.$$

De waarde van Heroon is hier een goede. De kettingbreuk begint met

$$1, \quad {}^{9}/_{8}, \quad {}^{10}/_{9}, \quad {}^{49}/_{44}, \quad {}^{206}/_{185}, \quad \ldots$$

WIMECOS.

In de laatste Bestuursvergadering van Wimecos zijn de Bestuursfuncties als volgt verdeeld:

G. A. Janssen, *Voorzitter;*

Ir J. J. Tekelenburg, Bergsche laan 13*a*, Rotterdam, *Secretaris;*

Dr H. A. Gribnau, Parklaan 31, Roosendaal (N.B.), *Penningmeester;*

Dr H. H. Buzeman en Dr Joh. H. Wansink, leden.

BOEKBESPREKING.

Dr J. C. H. Gerretsen, *Niet-Euclidische meetkunde*, 2e druk, Gorinchem, J. Noorduyn & Zn N.V., 1949. XII en 212 blz. met 132 fig. en 1 buiten-tekst-plaat, *f* 4,25.

In de periode, verlopen tussen het verschijnen van de 1e druk (1942) en van deze 2e druk is het boekje langer uitverkocht dan verkrijgbaar geweest. Inderdaad verdient dit boekje een ruime verspreiding, niet alleen onder studenten, voor wie het een prachtige inleiding in de gedachtenwereld der niet-Euclidische meetkunde is, maar ook onder leraren, wier geest door een bad in deze materie de niet altijd overbodige verfrissing kan opdoen. Weliswaar bevat het slechts elementair-meetkundige beschouwingen, maar het is daarin dan ook vrij uitvoerig; zo wordt een interessant hoofdstuk aan de stereometrie gewijd. De stijl is zakelijk en levendig, de behandeling elegant.

Ten behoeve van hen, die niet op de hoogte zijn met logarithmen en met hyperbolische functies, is een hoofdstuk ingelast, dat deze onderwerpen behandelt. Ik geloof, dat ik niet ver mistast, als ik het vermoeden uitspreek, dat de hooggeleerde schrijver de in dit hoofdstuk ontwikkelde methode opnieuw ter overweging aan de leraren aanbiedt. De logarithmen worden hier nl., naar een suggestie van F. Klein, ingevoerd met behulp van de eigenschappen der hyperbool $xy = 1$. In Euclides, 12e jg., blz. 262—282 heeft de schr.

indertijd een strenge uiteenzetting van deze methode gegeven; in bovenbedoeld hoofdstuk wordt, in overeenstemming met het karakter van het boekje, meer van de aanschouwing gebruik gemaakt. Reeds 20 jaar geleden volgde Dr U. Ph. Lely aan het Chr. Gymnasium in den Haag een soortgelijke methode (zie Euclides, 5e jg., blz. 5—11). Schr. laat o.a. zien, hoe men met deze methode eenvoudig het begrip „macht met irrationale exponent" kan definiëren. Het zou van belang zijn, als verschillende collega's er eens mee gingen experimenteren; de kolommen van Euclides worden gaarne voor hun bevindingen opengesteld.

De elliptische meetkunden van Riemann en Klein worden reeds in het voorbericht uitgeschakeld. Dat de schr. desondanks slechts 5 postulaten van Euclides vermeldt, en het 6e weglaat, zal wel betekenen, dat hij zich schaart onder hen, die het 6e postulaat niet erkennen als van Euclides afkomstig.

De 2e druk is uitgebreid met de parallelenconstructie van Engel en toepassingen daarvan op de hyperbolische trigonometrie, terwijl verder enkele aanvullingen en verbeteringen zijn aangebracht.

H. Str.

Dirk J. Struik, *A concise history of mathematics*, 2 vol., 299 blz., 49 portretten en tekeningen enz. — Dover Publications, New York, $ 3.00.

Onze sedert jaren in Amerika werkzame landgenoot D. J. Struik, wiens activiteit op het gebied der hedendaagse wiskunde steeds gepaard is gegaan met een zelfstandige beoefening van de geschiedenis van zijn wetenschap, heeft in zeer beknopten vorm (298 blz. klein octaaf, waarvan nog 58 in beslag worden genomen door afbeeldingen en 22 door litteratuur-opgaven) een overzicht gegeven van de historische ontwikkeling der wiskunde van de oudste tijden tot 1900.

Het moet een aanzienlijke mate van zelftucht hebben vereist, een zo omvangrijke stof in zo klein bestek samen te vatten en de lezer heeft dan ook menigmaal aanleiding, de spijt van den auteur, dat hij niet uitvoeriger mocht zijn, tot de zijne te maken. Aan den anderen kant heeft het ook zijn bekoring, de grote lijnen van het beeld door een vaste en deskundige hand getrokken te zien worden; het effect is hetzelfde als dat van een sterrenhemel bij volle maan. Wie dit boekje aandachtig heeft doorgewerkt, zal in ieder geval

een heldere voorstelling van de hoofdzaken van de geschiedenis der wiskunde bezitten, terwijl een omvangrijke en volledige bibliographie hem den weg wijst voor dieper gaande studie.

De grote beknoptheid van de uiteenzetting heeft den auteur niet belet, veel aandacht te wijden aan een onderwerp, dat hem altijd na aan het hart heeft gelegen, nl. het verband tussen de ontwikkeling van het wiskundig denken en den algemenen culturelen en sociologischen toestand van de perioden, waarin zij zich afspeelde. Dat is een gebied, waarop nog betrekkelijk weinig gewerkt is en waarop dan ook nog slechts weinig resultaten van blijvende waarde bereikt zijn. Met des te meer belangstelling neemt men kennis van de denkbeelden die Prof. Struik erover bezit (ze worden in verband met den beperkten omvang van het boek vaak meer aangeduid dan uiteengezet), zowel waar ze aannemelijk zijn als waar ze nog tamelijk speculatief lijken, en men voelt het als een leemte, wanneer ze ontbreken. Dat komt alle drie voor: we rekenen tot de eerste rubriek de beschouwingen van den schrijver over den invloed van het instituut der slavernij op de Griekse wetenschapsbeoefening (het is een leemte in de litteratuuropgave, dat in dit verband de naam van B. Farrington ontbreekt), tot de tweede de stoute bewering op p. 50 over een verband tussen de z.g. grondslagencrisis in de Griekse wiskunde en de decadentie van de politieke macht van Athene in de Peloponesischen oorlog, tot de derde het uitblijven van een poging tot verklaring van den sterken bloei van de Duitse wiskunde in de eerste decennia van de 19e eeuw.

Het is zeer te betreuren, dat Prof. Struik zijn drukproeven niet beter heeft gecorrigeerd. Zijn verdienstelijke boek wordt nu namelijk ontsierd door talrijke fouten, die den oningewijden lezer heel wat last en verbazing zullen kunnen bezorgen. Zo vindt men op p. 19 een Egyptische stambreukontwikkeling voor $\frac{2}{27}$ opgegeven, die in werkelijkheid $\frac{2}{97}$ voorstelt; op p. 29 een Babylonisch probleem tot onherkenbaar wordens toe verminkt ($1 - \frac{1}{16}$ waar $1 + \frac{1}{6}$ moet staan; $x = 12x$ inplaats van $z = 12x$). Op p. 33 ontbreekt een factor in een Indische formule voor π; op p. 118 wordt Vieta's productontwikkeling voor $\frac{2}{\pi}$ weergegeven met dezelfde fout die in de originele uitgave stond, maar die reeds sedert lang verbeterd is. Hinderlijk is ook de herhaaldelijke verminking van Latijnse namen en titels. Boethius kreeg als voornamen Ancius Manlius inplaats van Anicius Manlius. Een werk van Oresme wordt als De latitudibus geciteerd, terwijl het De latitudinibus heet en in de

titel van Cavalieri's werk, die als Geometria indivisilibus ... wordt opgegeven, is ook al een lettergreep zoek. Vieta's Isagoge werd een synagoge en zo zijn er talrijke andere voorbeelden.

E. J. DIJKSTERHUIS.

P. Wijdenes, *Five Place Tables*. Decimal system. 168 blz., 16 × 24 cm. Noordhoff, Groningen, Second edition z.j. (1948). Prijs gebonden *f* 5,25.

Voor mij ligt de fotografische herdruk van de Five Place Tables waarvan de eerste druk (in 1937) reeds in de 14de jaargang (1937/38) van dit tijdschrift op blz. 121 e.v. door Harkink uitvoerig werd besproken.

Gemakshalve zou ik naar zijn beoordeling, die ik volkomen onderschrijf, kunnen verwijzen, ware het niet, dat mij dan de gelegenheid zou ontgaan om speciaal de aandacht van de nieuwe lezers van dit tijdschrift op de verdiensten van dit werk van Wijdenes te vestigen.

De grootste verdienste er van acht ik, dat S. er de decimale verdeling van het kwadrant in gebruikt, ontstaan na de invoering van het metrieke stelsel na de Franse revolutie en reeds tientallen jaren vrijwel uitsluitend in gebruik bij hen, die uit hoofde van hun beroep (bijv. landmeetkunde) in de praktijk met de trigonometrie in aanraking komen. Zoals men weet wordt bij deze decimale verdeling de cirkelomtrek verdeeld in vier kwadranten, elk van 100 decimale graden (gr). Onderdelen van deze gr worden eveneens in het tientallig stelsel aangeduid. In analogie met dm, cm, mm, spreekt men van decigraad (dgr), centigraad (cgr) en milligraad (mgr) en, bij een nog verder gaande verdeling van de mgr, van dmgr (decimilligraad). Daar de verhouding van de lengte van een boog van 1" en 1 dmgr bij gelijke straal $\frac{400 \times 100 \times 100}{360 \times 60 \times 60} \approx 3$ is, heeft S. zich in zijn zeer lezenswaardige artikel over „Decimale tafels" (dit tijdschrift 13de jaargang 1936/37 blz. 193 e.v.) terecht op het standpunt geplaatst dat in vele gevallen — en zeker voor schoolgebruik — bij berekeningen met mgr kan worden volstaan.

In zijn tafels geeft S. ons in 5 decimalen allereerst de gewone logarithmen van de getallen van 1—11000 (table I). In table III zijn de logarithmen van sin, cos, tg en cotg opgenomen, tussen 1,2 gr en 98,8 gr opklimmende met 1 cgr. Daar log sin α en log tg α

tussen 0 en 1,2 gr zeer sterk veranderen is hier het interval in de tafel 1 mgr gemaakt. Tussen 0,15 gr en 1,2 gr mag men hiertussen lineair interpoleren. Voor waarden $0 < \alpha < 0,15$ gr waarvoor $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\alpha \text{ dmgr}}{\varrho \text{ dmgr}}$ ($\varrho = 636619,77$) geeft S.

$$\log \sin \alpha = \log \operatorname{tg} \alpha = \log \alpha_{\text{dmgr}} + \log \frac{1}{636619,77} = \log \alpha_{\text{dmgr}} + (0,19612 - 6)$$

of, volgens het Franse systeem voor aanduiding van de negatieve waarden van de logarithmen:

$$\log \sin \alpha = \log \operatorname{tg} \alpha = \log \alpha_{\text{dmgr}} + \bar{6},19612.$$

Het gebruik van dit gedeelte van Wijdenes' tafels is wel zeer handig.

Table IV van het werk, van belang voor hen, die in plaats van met logarithmen, met rekenmachines rekenen, geeft de natuurlijke waarden van sin, cos, tg en cotg om de cgr. Het is jammer, dat S. hier de tangenten van grote hoeken ook in 5 decimalen geeft en niet — zoals bijv. in de tafel van Balzer und Dettwiler terecht is gedaan — volstaat met een kleiner aantal. Zo is voor tg 99,15 gr vermeld 74,89199. Houdt men rekening met een maximale afrondingsfout hierin van 5×10^{-6}, dan leidt men voor de cosinus van deze hoek een waarde (0,01335137) af, die wel acht nauwkeurige cijfers achter de komma heeft, een aantal dat in een onjuiste verhouding staat tot het aantal 5 dat de tafel bedoelt te geven. Door het grote aantal interpolatie tafeltjes dat hierdoor nodig is geworden — ze vinden voor een deel hun plaats aan het eind van het boek — is het gebruik van dit gedeelte van het werk wat minder praktisch geworden. Dit is jammer, omdat S. zich overigens blijkbaar graag bij de praktijk wil aansluiten. Zo geeft hij in table II nog de omrekening van oude naar nieuwe graden en omgekeerd, die van nieuwe graden naar radialen en omgekeerd en de omrekening van oude graden in radialen.

Dat schrijver Harkinks praktische tabel voor $O = pkv$ ter bepaling van de oppervlakte O van een cirkelsegment uit de pijl p en de koorde k, waarin

$$v = -\frac{2^1}{-1 \times 1 \times 3}\left(\frac{p}{k}\right)^0 + \frac{2^3}{1 \times 3 \times 5}\left(\frac{p}{k}\right)^2 - \frac{2^5}{3 \times 5 \times 7}\left(\frac{p}{k}\right)^4 + \dots$$

ook in de nieuwe druk van zijn werk opneemt getuigt eveneens van dit streven. Op een los vel met talrijke formules uit de trigonometrie, dat bij de Five Place Tables behoort, leidt S. de formule schematisch af.

Ondanks mijn bezwaar tegen het aantal decimalen voor tg (cotg)

in de tafel voor de natuurlijke waarden der goniometrische functies kan ik het werk speciaal voor het onderwijs, dat m.i. meer dan tot dusverre op het gebruik van de decimale verdeling van het kwadrant moet worden gericht, van harte aanbevelen.

N. D. HAASBROEK.

Friedrich Dessauer, *Isaac Newton's levensreis tot scheppend inzicht.* Met een inleidend woord van Prof. Dr J. Clay. Uitgeverij „De Kern", den Haag, 1948, 380 pag., ƒ 7,90.

Prof. Dessauer heeft zich ten doel gesteld, het levenswerk van Isaac Newton de denkende mens van onze tijd nader te brengen, door het in de vorm van een historische roman voor te dragen. Zijn poging staat niet op zich zelf: ook aan Leonardo da Vinci, Galilei, Kepler, Leibniz, heeft men de laatste jaren romans gewijd.

Het behoeft geen betoog, dat in dergelijke gevallen de keuze van de romanvorm voor de schrijver grote moeilijkheden meebrengt. Enerzijds zal hij, om te kunnen voldoen aan elementaire eisen ter zake van compositie, karaktertekening, milieuschildering, van tijd tot tijd zijn verbeeldingskracht de vrije loop dienen te laten. Aan de andere kant moet hij zich in dit opzicht de nodige beperking opleggen, wil hij bij de uiteenzetting van het levenswerk van zijn held aan de eisen der wetenschap niet te kort doen.

Het komt mij voor, dat het boek van Prof. Dessauer, noch aan de eisen van de romanvorm, noch aan die van de gekozen stof, voldoende recht doet wedervaren. Wat de vorm betreft, deze roman ontaardt vrijwel voortdurend in een uiterst trage dialoog, en niet zelden in een monoloog. Een groot deel van de stof is ondergebracht in noten, die, noch met elkaar, noch met de hoofdtekst, in een organisch verband staan.

Men zou met deze formele tekortkomingen vrede kunnen hebben, wanneer niet ook de inhoud van het werk op sommige punten ernstig te wensen overliet. Zo doet het bepaald pijnlijk aan, dat Dessauer met betrekking tot de mysterieuze voorgeschiedenis van de publicatie der „Principia" — aan deze fascinerende episode wordt in Newton's levensgeschiedenis uiteraard een belangrijke plaats ingeruimd — een traditionele zienswijze overneemt, die berust op de voorheen gebrekkige kennis en kritiek der bronnen

en op een onjuist inzicht in Newton's probleemstelling en werkwijze, en die dan ook na de studies van Adams, Glaisher en Cajori door de ter zake kundigen is verlaten (verg. H. J. E. Beth, „Newton's Principia", 2e deel, Groningen—Batavia 1932, blzz. 72—95). Ook hebben de wijsgerige beschouwingen hier en daar een nogal primitief karakter.

De vertaler, Ir A. J. Dijker, stond voor een zware taak, immers, Prof. Dessauer schrijft een typisch duitse geleerden-stijl. Dit in aanmerking genomen, verdient zijn werk waardering, al vertoont het enkele vlekjes (blz. 143: „wij . . . elimineren *h*" i.p.v. „wij . . . delen teller en noemer door *h*"; meermalen „peripathetisch" i.p.v. „peripatetisch"). De uitgave is goed.

E. W. BETH.

BOEKAANKONDIGING.

Gedenkboekje bij het 35-karig bestaan van het genootschap voor geschiedenis der geneeskunde, wiskunde en natuurwetenschappen. Samengesteld door de secretaris Dr D. Burger.

Dr H. Mooy, Over de didactiek van de meetkunde benevens benaderingsconstructies ter verdeling van een hoek in gelijke delen.

Proefschrift ter verkrijging van de graad van Doctor in de Wis- en Natuurkunde aan de Universiteit van Amsterdam.

We lichten de volgende stellingen uit de tien, die op het inlegblad voorkomen:

1) Teneinde een beter gefundeerde didactiek van de wiskunde te verkrijgen, is het aan te bevelen in de scholen voor V.H. en M.O. proeven te nemen op psychologisch-didactische grondslag.

6) De tijd, die op het schriftelijk eindexamen van het gymnasium beschikbaar is voor het maken van de wiskunde-opgaven is te kort, om betrouwbare conclusies uit het gemaakte werk te kunnen trekken.

8) Wiskunde-onderwijs in de twee hoogste klassen van de A-afdeling van het gymnasium is onder andere verantwoord als voorbereiding voor latere wijsgerige scholing.

10) Het onderwijs in de Stereometrie kan voorafgegaan worden door een axiomatische behandeling van de planimetrie.

We verzoeken Dr Mooy deze vier stellingen in „Euclides" te verdedigen.

Van de Uitgeverij Waltman, Delft:

Ir W. J. Vollewens, Oplossingen der wiskunde-vraagstukken van het prop. ex., Delft, 48 blz. ƒ 0,90.

Prof Dr F. Schuh en Ir W. J. Vollewens, Vraagstukken theoretische mechanica met aanwijzingen voor de oplossing:

I. Beweging van het stoffelijk punt, 140 blz. ƒ 3,25.

II. Beweging van vaste lichamen en stelsels van vaste lichamen, 212 blz. ƒ 4,70.

Ir W. J. Vollewens en Dr Ir Joh. H. M. Manders, Repetitiedictaat Theoretische Mechanica, 2e *druk*, 274 blz. ƒ 3,90.

Ir W. J. Vollewens, Repetitiedictaat Differentiaalvergelijkingen, 3e *druk*, 70 blz. met antwoorden ƒ 1,40.

Van J. B. Wolters, Groningen:

Dr P. G. J. Vredenduin en Dr A. van Haselen, Algebra IV H, 129 blz. *f* 2,80.

Van P. Noordhoff, Groningen:

Dr P. G. van de Vliet, Beknopte statistiek, 4*e druk f* 2,—.

C. J. Alders, Algebra. Deel IIA, 6*e druk f* 2,10, gec. *f* 2,40.

C. J. Alders, Vlakke meetkunde, 7*e druk*, gec. *f* 3,40.

Dr H. J. E. Beth en Dr P. J. van Loo, Mechanica, 6*e druk f* 3.90.

Dr B. P. Haalmeijer, Leerboek der Vlakke meetkunde deel I, 6*e druk f* 2,60, gebonden *f* 3,10.

Noordhoff's Tafel in vier decimalen, 13*e druk*, gebonden *f* 1,40.

P. Wijdenes, Klein leerboek der Algebra, 1e stukje, 4*e druk*, gecart. *f* 2,10.

J. Versluys, Vlakke driehoeksmeting met vraagstukken 20*e druk f* 2,75.

Noordhoff's Schooltafel in 5 decimalen, 8*e druk f* 2,—.

Wijdenes en Van de Vliet, Algebra voor de H.B.S. A, 5*e druk f* 2,90.

Van Wed. J. Ahrend en Zoon, Amsterdam:

H. J. Stutvoet, Van negenproef tot gulden snede, 2*e druk f* 6,90.

RECTIFICATIE.

Dr Joh. H. Wansink verzoekt naar aanleiding van het verslag van de Conferentie te Doorn om de volgende rectificatie:

Op blz. 102, einde der tweede alinea, staat:

> Hij pleitte voor een afschaffing van de meetkunde voor de H. B. S. A l.l. en een invoering van de Differentiaalrekening.

Ik zou dit graag als volgt gewijzigd zien:

> Hij kon de huidige leerstof voor de meetkunde op de H. B. S. A maar matig apprecieren en pleitte voor invoering van Differentiaalrekening.

HOOFDSTUKKEN UIT DE WISKUNDE VAN BELANG VOOR DE ECONOMISCHE WETENSCHAP

door

Prof. Dr J. TINBERGEN.

Kennis van de wiskunde is niet slechts van betekenis voor hen die zich later in de technische wetenschappen of in de wis- en natuurkunde willen gaan verdiepen; zij wordt ook in toenemende mate in de economische wetenschap en bij economisch-statistisch onderzoek zowel als bij statistisch onderzoek van andere aard gebruikt. Het kan daarom zijn betekenis hebben, wanneer ik tracht in het kort te schetsen, welke gedeelten van de wiskunde voor de econoom van betekenis zijn; bij het onderwijs in de wiskunde zal het, voor een gedeelte van de leerlingen althans, de moeite waard zijn, wanneer aan deze onderdelen enige aandacht wordt geschonken. Uiteraard gebeurt dit reeds voor een niet onbelangrijk gedeelte van de hoofdstukken, die voor de econoom van betekenis zijn. Ten dele is het dan ook meer een kwestie van accent en wellicht ook van de voorbeelden bij ingeklede vraagstukken.

Voor zeer speciale onderdelen van de economische wetenschap, en dan uitsluitend door gespecialiseerde theoretici, worden in de laatste tijd herhaaldelijk evenzeer gespecialiseerde onderdelen van de wiskunde gebruikt, die ik hier echter niet ter sprake zal brengen. Wanneer men in de laatste jaargangen van het tijdschrift Econometrica bladert, zal men daarint oepassingen van differentievergelijkingen, gemengde differentie-differentiaalvergelijkingen, operatorenrekening en andere zeer geavanceerde wiskundige technieken vinden, doch deze zijn slechts voor enkelingen van betekenis. Het staat evenzo met de wiskundige technieken, die in de theoretische statistiek worden gebezigd; om enkele voorbeelden te noemen, wordt daarbij de meervoudige integratie en de meer-dimensionale analytische meetkunde als uitgangspunt gebruikt, maar het spreekt ook wel vanzelf, dat zelfs een voorbereiding daartoe niet kan worden gerekend tot de kennis, die een gemiddelde econoom behoeft te bezitten.

Wanneer ik over een econoom spreek, bedoel ik hier de algemene econoom, en wanneer ik over zijn wiskundige hulpmiddelen spreek, bedoel ik de hulpmiddelen, die hij nodig heeft om een algemeen

leerboek van de economie van de moderne Angelsaksische soort met vrucht te kunnen bestuderen.

Het spreekt wel vanzelf, dat bedoelde wiskundige hulpmiddelen in sterke mate worden bepaald door het eigen karakter van de economische vraagstukken. Het is dan ook aan de hand van een bespreking daarvan, dat ik hier de hoofdstukken van de wiskunde wil noemen, die voor de algemene econoom van betekenis zijn.

Economische vraagstukken zijn in de eerste plaats gekenmerkt door het feit, dat daarin gewoonlijk een groot aantal variabelen optreedt. Dit betekent reeds aanstonds, dat voor de wiskundige behandeling van economische vraagstukken het kiezen van een doelmatige notatie en het kennen van systemen van notatie van betekenis zijn. In de tweede plaats is het van belang dat de econoom kan werken met sommen van gelijksoortige grootheden en de daarbij gebruikelijke verkorte symboliek. Het betekent in de derde plaats, dat men veelal slechts met betrekkelijk eenvoudige functionele verbanden kan werken, in hoofdzaak lineaire, omdat anders behandeling vrijwel uitgesloten is. Het is daarbij een gelukkige omstandigheid, dat de variatie in de variabelen, waarmede men zich bezig houdt, veelal voldoende klein is om lineaire benaderingen aanvaardbaar te maken.

Het is voorts voor de econoom van bijzondere betekenis, dat hij een scherp onderscheid weet te maken tussen de verschillende karakters van de variabelen, die in zijn vraagstukken optreden; in de eerste plaats natuurlijk het verschil tussen gegeven grootheden en onbekenden, doch daarnaast ook gegeven grootheden van uiteenlopende aard. Sommige zullen als volkomen gegeven en constant mogen worden beschouwd; andere als gegeven, doch bijvoorbeeld veranderlijk in de tijd; weer andere, die men het beste als parameters kan aanduiden, zullen voor een bepaalde klasse van vraagstukken als gegeven kunnen worden beschouwd, doch bijvoorbeeld bij een wijziging van de economische politiek een andere waarde kunnen hebben. De logica, die met dit soort vraagstukken samenhangt, moet goed worden gekend; men moet weten, dat het als gegeven beschouwen van een bepaalde variabele equivalent is met het toevoegen van een vergelijking aan een stelsel van vergelijkingen; men moet weten dat, wanneer in een bepaald probleem het aantal vergelijkingen één minder is dan het aantal onbekenden, één dezer laatsten vrij kan worden gekozen. Men moet goed de betekenis beseffen van afhankelijkheid tussen vergelijkingen. Van grote betekenis voor de econoom is ook de transformatie van vergelijkingen als gevolg van de invoering van nieuwe eenheden

en het aanschouwelijk voorstellen van een vergelijkingenstelsel, bijvoorbeeld door grafische hulpmiddelen.

Uit het voorgaande volgt ook, dat het kunnen oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen met een discussie van de verschillende mogelijkheden, die zich daarbij kunnen voordoen, van veel betekenis is.

Van betekenis is ook, dat men terdege het verschil kent tussen een gegeven numerieke waarde van een bepaalde variabele en het functionele verband, dat er tussen deze variabele en enige andere variabelen kan bestaan. Een concreet voorbeeld van wat ik hiermede bedoel wordt geleverd door het bekende begrip „vraag" in de economie: daaronder verstaat men de ene keer inderdaad een gegeven waarde van de gevraagde hoeveelheid van een bepaald artikel; de andere keer het functionele verband tussen deze gevraagde hoeveelheid en de prijs van het betreffende artikel.

Zoals men ziet, gaat het hier dus om de logische structuur, die de samenhang tussen een aantal verschijnselen kan vertonen. De praktijk heeft wel geleerd, dat men enige kennis van economische vraagstukken en de wetenschappelijke behandeling daarvan moet bezitten om met vrucht de wiskundige kennis van de economen te vergroten. Als literatuur te dien aanzien mogen worden genoemd het boek van Allen, Mathematical analysis for economists, en Evans, A mathematical introduction to economics.

Intussen blijft het niet bij deze fundamentele kwesties; daarnaast maakt de economische wetenschap in het bijzonder gebruik van de differentiaalrekening, omdat vele vraagstukken in de vorm van een maximum- of minimumprobleem kunnen worden gepresenteerd. Gegeven het grote aantal variabelen is daarbij kennis van partiële differentiatie ook van bijzonder nut, terwijl bijna steeds sprake is van minimum- of maximumvraagstukken met nevenvoorwaarden.

In mindere mate, doch toch ook meermalen, komt men in de economie te staan voor vraagstukken van integratie.

Met deze opsomming moge worden volstaan. Het is duidelijk, dat zij meer in de richting van algebra en differentiaalrekening dan in de richting van meetkunde of goniometrie wijzen. Zoals reeds even werd opgemerkt, moet daarbij in het bijzonder betekenis worden gehecht aan de toepassingen, zoals toch voor het leren van wiskunde steeds het zelf hanteren van de technieken zeer belangrijk is. Aan het behandelen van ingeklede sociaal-economische of bedrijfs-economische vraagstukken zou dan ook eigenlijk grote betekenis moeten worden gehecht. Het is jammer, dat er

op dit moment geen vraagstukkenboek bestaat, waarin men deze gemakkelijk bijeen vindt. Hopelijk vindt in de naaste toekomst nog eens iemand gelegenheid om een aantal van deze vraagstukken te ontwerpen.

JAARVERGADERING VAN DE GROEP L.I.W.E.N.A.G.E.L OP 3 JANUARI 1949 IN HOTEL TERMINUS TE UTRECHT.

De voorzitter opent de vergadering om 11.15 uur en spreekt eerst een woord van welkom tot de inspecteurs, de heren V. d. Ent, Van Dam en De Bruyn, en verder tot de vertegenwoordigers van de bevriende groepen en verenigingen. Hij bespreekt de betrekkingen, die L.i.w.e.n.a.g.e.l in het afgelopen jaar onderhouden heeft met het Mathematisch Centrum, waar het bestuur vertegenwoordigd werd door de heren Wielenga en Mooy en met het Wiskundig Genootschap, waar Dr Van Rees L.i.w.e.n.a.g.e.l vertegenwoordigde. Aan de Inspecteurs heeft L.i.w.e.-n.a.g.e.l een voorstel gezonden voor een niet bindend programma wat betreft de opleiding van de a-afd. v. h. Gymnasium voor de vakken Natuurkunde, Scheikunde en Biologie. L.i.w.e.n.a.g.e.l heeft meegewerkt aan het Congres, dat op 1 April 1948 te Amsterdam gehouden is en heeft zich ernstig bezig gehouden met de leraarsopleiding. Op 3 Maart 1945 is het archief van L.i.w.e.n.a.g.e.l totaal verbrand: de voorzitter dankt daarom Dr Schrek hartelijk voor het vele materiaal, waarmee hij ons archief weer heeft aangevuld.

De voorzitter herdenkt het overleden lid Dr Nathans. Deze is een vooraanstaand natuurkundeleraar geweest en heeft veel gepresteerd; we hebben aan hem, niet alleen als leraar, maar ook als organisator veel te danken.

De Voorzitter deelt mee, dat hij het onderwijs gaat verlaten en dus zijn voorzitterschap van L.i.w.e.n.a.g.e.l moet neerleggen. In zijn plaats werd, op voordracht van het bestuur, bij acclamatie de heer Willemse tot voorzitter gekozen en in de hierdoor opengekomen bestuursplaats de heer Wielenga.

Tot leden van de Kascommissie worden benoemd de heren Sedee en Oosterholt.

De voorzitter deelt mede, dat er nog steeds exemplaren van het Verslag van het Congres te koop zijn en vestigt er nogmaals de aandacht op, dat een abonnement op „Euclides", dat f 8.— kost, voor leden van L.i.w.e.n.a.g.e.l slechts f 2.50 kost.

Nu leidt de Voorzitter de 1e spreekster in, *Mevr. Prof. Dr H. W. F. Stellwag*, die een inleiding zal houden over de vraag:

„WAT IS HET BELANG VOOR HET ONDERWIJS IN DE PAEDAGOGIEK EN DE PSYCHOLOGIE VOOR DE LERAARSOPLEIDING?".

Het is mogelijk, dat men het nut van een paed. psychol. opleiding voor leraren zal betwisten:

a. Omdat men meent, dat vakkennis voldoende is. Men zal dan tegen elke andere vorming der leraren buiten het eigen vak om gekant zijn, ook tegen een didaktische.

b. Omdat men meent, dat een didaktische er naast voldoende is, voornamelijk een speciaal didaktische. Over een algemeen didaktische valt dan nog te praten.

Elke didaktiek echter houdt zich bezig met de grondslagen van het leerproces, vanzelf komt men dan in psychologische problemen terecht.

De theorieën over het leerproces gaan uit van de intelligentie. Wat zij is, hoe of zij functioneert, daarover zal men dan toch een zekere mening moeten hebben.

Ook over wat men dan „aanleg" noemt. Men zal zien, hoe men verouderde theorieën vooropstelt. De intelligentie, zo moeten wij thans zeggen, is maar niet een aanleg, een vermogen, zij is een gedragswijze, een wijze van aanpak. Maar niet alleen een wijze van aanpak van theoretische problemen, evenzeer van practische. Zij is een onderdeel van de wijze van in de wereld staan en de levensproblematiek aanvatten, *van een persoon*. De intelligentie is nooit te lichten uit het geheel der persoon. Wij weten dit allen in déze vorm: dat we de belangstelling moeten wekken, dat de persoonlijke relatie er toe doet. We nemen deze theorie als fraaiigheden op de koop toe: maar ze zijn essentiëel.

Met de gevoelsmatige instelling hangt de intellectuele samen. Uit het gevoelsleven komen de krachten, die het intellectuele leven, de meer uiterlijke façade, voeden. We moeten dus weten, dat er zijn persoonlijkheidstypen, zoals er intelligentietypen zijn. Maar deze schematische onderscheidingen geven ook weer alleen aan de benaderingswijze van het individu; op grond van zijn eigen levensproblematiek; op grond van zijn „wereld"; dat is zijn *omgeving.*

De levensproblematiek kan de persoonlijkheid zó overweldigen, dat het wordt een redden van het naakte lijf. Twee oplossingen zijn mogelijk: „de vlucht in het denken", (wiskunde) „de vlucht vóór het denken".

Hier liggen in hun extreemste vorm twee markante persoonlijkheidsverschillen de introvert en de latrovert; wij zien ze als de mathematici, de verstandsmensen en de talenmensen voor wie het gevoelsmatige, het *contact met anderen* essentiëel is, die dus in de wijzen van contact leggen, die de taal is, geïnteresseerd zijn. Maar de mathematicus is niet zonder gevoel, integendeel, zijn gevoel is de achtergrond van zijn math. instelling. Hiermee hangt samen de concentratie, de doorzetting, de perseveratie (van belang voor de mathese!) de impulsiefheid, (afleidbaarheid) de luiheid, de domheid.

Interesse moet er dus zijn voor het kind als persoon; door het persoonlijk contact, de paedagogische epos gaat de onderwijsprocedure keren. Doch men moet ook weten van algemene wetmatigheden: hoe ligt de belangstellingsrichting op een bepaalde leeftijd?

Hoeveel moet de leraar van deze dingen weten; iets: men moet de moeilijkheden kunnen onderkennen. Wat is de reden van het te kort schieten?

Wij zijn geen medici!

Elk proefwerk moet een stuk research-werk zijn: ten aanzien van onze eigen procedure en ten aanzien van het kind.

Hierop volgt een levendige discussie, waarbij vooral over het belang van het testen wordt gesproken. Spreekster blijkt aan testmethoden in plaats van een toelatingsexamen geen waarde te hechten.

Tenslotte verklaart spreekster, dat zij wenselijk acht, dat iedere a.s. leraar een cursus gevolgd moet hebben in paedagogiek en psychologie van 2 jaar met 2 lesuren per week.

Hierna werd het 1ste gedeelte van de vergadering gesloten.

Als de vergadering heropend wordt, heet de voorzitter ook nog Inspecteur Van Andel welkom evenals de heer Veenstra.

De heer Sedee zegt, dat de Kascommissie de rekening en verantwoording van de penningmeester heeft nagezien en in orde bevonden; hij vreest echter dat, gezien de hogere onkosten die voor alles gemaakt zullen moeten worden, het bestuur in de toekomst met de toegestane toelage niet meer toe zal kunnen komen.

Hierna geeft de voorzitter het woord aan Prof. Dr M. Minnaert te Utrecht, die spreekt over:

HET BELANG VAN HET ONDERWIJS IN DE DIDACTIEK VOOR DE LERAARSOPLEIDING.

Eindelijk begint de universiteit zich te bekommeren om de voorbereiding der studenten tot het ambt van leraar. De opleiding dient in elk geval te omvatten: 1. de algemene paedagogiek; 2. de speciale didaktiek van het vak en 3. het hospiteren aan een of twee scholen. Wij zullen hier in het bijzonder de betekenis van de didaktiek bespreken.

Is het wel nodig, hier een officiëel „vak" van te maken? Een dergelijke vraag wordt altijd gesteld, wanneer de gewone empirische en tastende gedragingen van de mens vervangen worden door het wel overlegde en wetenschappelijke handelen. Ook in de didaktiek kunnen wij veel meer bereiken door de ervaringen van onze voorgangers en tijdgenoten samen te voegen met de onze, en er een overzichtelijk geheel van te maken. Het meedelen daarvan aan de jongeren gaat het best door colleges, omdat in deze materie het levende woord veel meer uitwerkt dan het dode boek; daarnaast is het zeer nuttig, de studenten zelf aan het werk te zetten. De bedoeling van zulke didaktische colleges moet zijn: aan de aanstaande leraar de eerste, soms zo noodlottige vergissingen en dwalingen te besparen; hem de leermiddelen en leermethoden te doen kennen, die de leraar tot zijn beschikking heeft bij het onderwijs; hem dus wegwijs te maken in allerlei richtingen, maar zonder hem recepten te geven, het aan hem zelf overlatend zijn eigen weg te kiezen; hem te maken tot een goed leraar in de nu heersende omstandigheden, en tot een wegbereider voor de toekomst.

Al te veel heerst nog de mening, dat er geen onderwerpen genoeg zijn om aan een didaktisch college inhoud te geven, en dat men dus terecht zal komen in algemeenheden en gemeenplaatsen — dat dit gevaar niet gevreesd moet worden blijkt, wanneer men een lijst opstelt van wat er in een dergelijk college ter sprake dient te komen. Een schets van programma moge hier in beknopte vorm volgen; bij wijze van voorbeeld is hier uitgegaan van de natuurkunde, maar voor de andere natuurwetenschappen en ten dele voor de wiskunde ware een dergelijke lijst op te stellen.

1. De betekenis van het onderwijs in de natuurkunde in het geheel van het M.O. Fundamentele verschillen tussen het onderwijs aan de universiteit en het M.O.
2. De psychologische eis: wek belangstelling en medeleven; tegenover de logische eis: wees duidelijk. Hoe bereik ik beide?
3. De theoretische les: spreektechniek, zorg voor de Nederl. taal, gebruik van het bord, vraag en antwoord.
   Het leerboek. Het opgeven van vraagstukken.
   Wandplaten. Lantarenplaatjes. Films. Modellen.
   De demonstratieproef; zichtbaarheid op afstand, speciale demonstratietoestellen, gevaarlijke proeven, mislukken van proeven, overzichtelijkheid.
   De praktische oefeningen: individuele proeven of proeven gelijk-op? Exact meten of natuurkundig begrijpen? Het overwinnen van praktische bezwaren: kosten, tijdsgebrek, groot aantal leerlingen. Speciale toestellen, voor het M.O.-praktikum ontworpen. Verband met de theoretische les.
   Waarnemingen in de vrije natuur, natuurkunde en sport.
   Technische toepassingen der natuurkunde; welk belang moet hieraan gegeven worden in de school? Maatschappelijke betekenis.
   Het onderlinge verband van deze didaktische methoden; de opbouw van een les en van een cursus.

4. Indien er tijd is, een stuk van de leerstof in detail bespreken, met de wetenschappelijke achtergrond, de didaktische hulpmiddelen, de toepassingen, enz.
5. De wisselwerking tussen het onderwijs in de natuurkunde en de andere vakken. Het *historische* element; welke delen van de leerstof lenen zich daartoe? Anekdoten of geschiedenis der ideeën?
Is de *mechanica* als een vak op zich zelf te beschouwen?
Het gevaar van overwoekeren van de *wiskunde*; rekenliniaal.
Coördinatie in tijd van de natuurkunde met het onderwijs in de overige vakken.
Waar kunnen enkele *wijsgerige* beschouwingen ingevlochten worden?
De oorsprong en graad van zekerheid van onze mechanische axioma's.
Hoe te denken over een gecombineerd natuurwetenschappelijk vak, „*general science*"?
6. Kritisch onderzoek van het onderwijsprogramma (of van een deel ervan). Mogelijkheden van besnoeiing of verbetering. (Op dit gebied wordt b.v. verdienstelijk werk verricht door de Wiskundegroep van de Werkgemeenschap tot Vernieuwing van Onderwijs en Opvoeding).
7. Experimenteren op didaktisch gebied. Experimentele vergelijking van de resultaten van twee verschillende onderwijsmethoden. Resultaten van vroegere onderzoekingen. Wat blijft er van ons middelbaar onderwijs hangen in het latere leven? — Deze onderwerpen kunnen aanleiding geven tot het bewerken van didaktische dissertaties.

De hierboven genoemde punten zijn natuurlijk slechts bedoeld als voorbeelden, om te laten zien, hoeveel interessante, concrete vragen behandeld dienen te worden; naar volledigheid is in genen dele gestreefd. Toch zal deze schets wellicht voldoende zijn om aan te tonen, dat een didaktisch college van het grootste nut kan zijn om de jonge leraar vrij te maken van vooroordelen en traditie, hem de schoonheid en belangrijkheid te openbaren van het vak, waaraan hij zijn leven heeft gewijd.

Ook hierop volgde een levendig debat. Inspecteur V. d. Ent merkt op dat hij met veel genoegen dit alles gehoord heeft, dat hij gaarne zou zien, dat ieder, die het leraarsambt ambieert, didaktisch studeert onder goede leiding, niet alleen wat betreft het eigen vak, maar in 't algemeen ook wat betreft zijn gebruik van de Nederl. taal, zijn voordracht en zijn stemvorming.

De heer Schut drong ten eerste aan op het verzenden van een spoedbericht aan de minister, dat deze kwesties zo spoedig mogelijk in behandeling zouden worden genomen. Door V. d. Steen en Willemse wordt medegedeeld, dat L.i.w.e.n.a.g.e.l als Groep hierin geen zelfstandige stappen mag zetten.

Inspecteur Van Andel wierp nog de vraag op, wie dan wel deze didaktische colleges zou moeten geven. Hij gaf de voorkeur aan ervaren leraren.

Inspecteur Van Dam deelt mee, dat het Gymnasiale eindexamen reeds dit jaar 3 dagen krijgt voor het schriftelijk werk en er meer tijd beschikbaar komt voor Stereometrie en Anal. Meetkunde en Goniometrie. Hij zou het persoonlijk zeer jammer vinden, als het doctoraal examen voor leraren niet volwaardig wetenschappelijk bleef, maar zou *daarna* nog een speciale opleiding wensen voor leraren; de toekomst moet echter leren hoe.

Hierna legt de heer Frederik zijn voorzitterschap neer en de heer Willemse dankt hem met enige hartelijke woorden voor alles, wat hij als voorzitter van L.i.w.e.n.a.g.e.l heeft gedaan.

A. T. M. KRAMER, *Secretaresse*

Kruisbessenstraat 12,
's-Gravenhage.

NEDERLANDSE NATUURKUNDIGE VERENIGING EN MATHEMATISCH CENTRUM.

SYMPOSIUM

over

Moderne Rekenmachines

georganiseerd door: **de Nederlandse Natuurkundige Vereniging en het Mathemathisch Centrum.**

Het Symposium zal worden gehouden op *Zaterdag* 14 *Mei* 1949 in de collegezaal van het Natuurkundig Laboratorium van de Universiteit van Amsterdam, Plantage Muidergracht 6 te *Amsterdam*

Symposiumcommisse: Prof. Dr F. Zernike, voorzitter; Dr K. J. Keller, secretaris, Julianalaan 84, Arnhem; Prof. Dr J. G. van der Corput; Dr Ir A. van Wijngaarden; Dr H. Brinkman; Dr. J. F. Schouten.

PROGRAMMA.

10.00—10.30	Opening en inleiding door Prof. Dr F. Zernike.
10.30—11.30	Dr Ir A. van Wijngaarden (Amsterdam): Algemeen overzicht over Moderne Rekenmachines.
11.30—12.30	W. L. v. d. Poel (Den Haag): Schakelingen van automatische cijfermachines.
12.30—14.15	Lunch in het Restaurant van Artis.
14.15—15.15	Prof. Dr F. Zernike (Groningen): De differentiaal analysator als voorbeeld van een continue machine.
15.15—16.15	Prof. Dr H. Freudenthal (Utrecht): Mathematische problemen van terugkoppeling.
16.15	Slotwoord van de Voorzitter.

Van de voor iedere voordracht uitgetrokken tijd is circa 15 minuten voor discussie bestemd.

Een warme lunch met vlees, groente en aardappelen à *f* 2,— kan worden gebruikt in het Restaurant van Artis.

Men gelieve zich voor deelname aan het Symposium *vóór Zaterdag 7 Mei a.s.* per briefkaart op te geven bij de secretaris, Dr K. J. Keller, Julianalaan 84 te Arnhem.

Het is noodzakelijk te vermelden of men al of niet aan de lunch wenst deel te nemen.

Aan de deelnemers zal een toegangskaart worden gezonden. Alléén op vertoon van deze kaart zal gratis toegang worden verleend tot het Restaurant van Artis.

De voordrachten met discussie, zullen worden gepubliceerd in het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde. Zij, die geen lid zijn van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging, kunnen overdrukken van het verslag verkrijgen tegen betaling van ƒ 1,50, bij vooruitbetaling te voldoen bij intekening tijdens het symposium òf door storting op girorekening 263079 t.n.v. de Bureau-Commissaris der Nederlandse Natuurkundige Vereniging te Utrecht.

De verslagen kunnen ook, voorzien van een omslag van het Mathematisch Centrum, besteld worden door overschrijving van ƒ 1,50 op girorekening nr. 462890 t.n.v. het Mathematisch Centrum te Amsterdam.

Korte inhoud van de voordrachten.

Algemeen overzicht over moderne rekenmachines
door A. van Wijngaarden.

Onder rekenmachines verstaan wij alle physische constructies gemaakt met de bedoeling berekeningen uit te voeren. Voorbeelden zijn bijv. de tafelrekenmachine (TRM) en een rubbervlies, gespannen over zekere obstakels. Van belang zijn de karakteristieke eigenschappen van rekenmachines, als de cijfermaat (d.i. de mate, waarin een getal wordt verwerkt als een combinatie van cijfers), de graad van automatisme, de universaliteit (algemene of speciale vraagstukken), de commercialiteit (o.a. van groot belang met het oog op de kosten), het parallelisme (al of niet gelijktijdig uitvoeren van deelberekeningen), snelheid. Aan de hand van een ruimtelijk model worden enige belangrijke types geclassificeerd naar de drie belangrijkste kenmerken, nl. commercialiteit, cijfermaat en automatisme.

Alle rekenmachines bezitten een aantal organen, welke bij de eenvoudige vormen vaak niet eenvoudig als zodanig onderkend worden, nl. rekenkundig orgaan, geheugen, besturing, invoer en uitvoer. Uit physisch oogpunt het meest interessante orgaan is het geheugen. Dit moet bij de moderne supermachines grote aantallen getallen kunnen onthouden. De machine moet er in kunnen lezen, inschrijven en overschrijven met grote snelheid. Voorts moet het redelijk in prijs zijn. Naast de geponste kaarten of banden zijn

ontwikkeld magnetische draden, banden en trommels, acoustische systemen (acoustische trillingen in kwikkolommen) en electronische geheugens, waarbij ingewikkelde ladingsverdelingen op een isolator worden gefixeerd. Van wiskundig standpunt zijn het rekenkundig orgaan en de besturing interessant. Zekere facetten van de besturing worden belicht.

Literatuur: F. J. Murray, The theory of mathematical machines.

De differentiaal analysator als voorbeeld van een continue machine

door F. Zernike.

Iedere continu verstelbare overbrenging tussen twee draaiende assen kan gebruikt worden voor het mechanisch berekenen van een integraal. De snelheidsverhouding is daarbij de integrand. Sinds meer dan een eeuw gebruikt men vrijwel uitsluitend het scherprandig integreerwiel, dat rolt zonder schuiven op een loodrecht daarop staande vlakke schijf, maar schuift in de richting van zijn as (planimeter, integrator). Met n achter elkaar geschakelde integratoren zal men, uitgaande van een bekende n^{de} afgeleide $y^{(n)}$, achtereenvolgens alle lagere afgeleiden tot y zelf verkrijgen. Door verdere mechanische koppelingen met tandwielen kan dan een functie F van deze grootheden worden gevormd. Kelvin gaf reeds in 1876 de verrassende mogelijkheid aan, het eindresultaat te gebruiken voor het aandrijven van de eerste integrand (terugkoppeling) en zo automatisch de differentiaalvergelijking

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$$

op te lossen. De practische verwezenlijking was eerst mogelijk toen Bush in 1930 mechanische versterkers invoerde om het telkens optredende energieverlies aan te vullen. Na een korte bespreking van de bouw der gehele machine worden schema's gegeven voor de vergelijking van Legendre en voor een niet-lineaire vergelijking met meervoudige terugkoppeling. Bush heeft een grotere machine geconstrueerd met electrische koppeling en versterking. Tenslotte wordt nader ingegaan op de mechanica van het integreerwiel, zijn elastische deformatie en het daardoor onvermijdelijke slippen. In verschillende opzichten is het beter, het wiel op een bol in plaats van op een vlakke schijf te laten afwentelen. Spreker heeft enige oriënterende proeven hiermede

gedaan, die aanwijzingen geven omtrent de factoren, die de bereikbare nauwkeurigheid bepalen.

Literatuur: V. Bush, J. Franklin Inst. **212**, 447, **240**, 255.
S. Rosseland, Naturwiss. **27**, 729 (1939).

Schakelingen van automatische cijfermachines
door W. L. van der Poel.

De bedoeling van deze lezing is het geven van enig inzicht in de wijze, waarop met relais, electronenbuizen of andere hulpmiddelen gerekend kan worden. Hierbij zal uitsluitend het tweetallig stelsel ter sprake komen, omdat dit zich bijzonder goed leent voor cijfermachines, die relatief veel bewerkingen met weinig getallen moeten uitvoeren. Voordelen van dit stelsel zijn: weinig elementen, bewerkingen eenvoudig, schakelingen eenvoudig. Nadeel: er moet omgerekend worden van tien- naar tweetallig stelsel en terug.

Eerst enige bijzonderheden over het tweetallig stelsel. De tafels van optelling luiden: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$. Met behulp hiervan kan men optellingen uitvoeren. Negatieve getallen kunnen worden voorgesteld als complementen, maar nog handiger als getransponeerden, d.w.z. op alle plaatsen waar anders een 0 had gestaan, zetten we nu een 1 en omgekeerd. Het teken van een getal kan worden aangegeven door een extra cijfer links van het getal. 0 stelt dan plus voor en 1 een min. Het blijkt, dat men met dit tekencijfer kan rekenen als met een gewoon cijfer. Er zal iets worden gezegd over vermenigvuldigen.

Vervolgens worden besproken de gedachtengangen, die leiden tot somvormende schakelingen. De tafels van optelling vertonen grote overeenkomst met schema's van de waarheidswaarde van de logische bewerkingen in de logistiek. Het linkse somcijfer wordt verkregen door de logische conjunctie, het rechtse door de vervinding $\bar{a}b \vee \bar{b}a$. Als er nu schakelelementen gevonden worden, die deze logische verbindingen materialiseren, dan is plausibel gemaakt, dat hiermede een somvormende schakeling samengesteld kan worden. Een voorbeeld wordt besproken.

Tenslotte heeft een rekenmachine als onmisbaar onderdeel nog een geheugenelement nodig.

Mathematische problemen van terugkoppeling

door H. Freudenthal.

Voor de mathematische beschouwing ligt het voor de hand, terugkoppeling (feed back) in een analogie-rekenmachine te interpreteren als een opstelling voor een iteratie-procédé, zoals er worden toegepast voor het oplossen van algebraïsche vergelijkingen, stelsels van lineaire vergelijkingen, differentiaalvergelijkingen enz.; het convergentie-vraagstuk voor het iteratie-procédé komt dan overeen met het stabiliteits-probleem voor die opstelling. Werkt men deze opvatting in speciale gevallen uit, dan blijkt vaak de mathematische convergentie afwezig te zijn, terwijl de opstelling wel stabiel is.

Deze verontrustende tegenstrijdigheid kunnen wij bij nader onderzoek als volgt verklaren en elimineren: Die iteratie, waarvan men zich bij het cijferend oplossen van numerieke problemen bedient, is de discrete iteratie, waarbij de benaderende oplossingen dus genummerd zijn door middel van de natuurlijke getallen. De terugkoppeling in analogie-rekenmachines is daarentegen continue iteratie, dus met continue nummering der benaderende oplossing. Voor de wiskundige schijnt continue iteratie een complicatie te zijn, omdat er in de vergelijking een nieuwe onafhankelijke veranderlijke, de tijd, bijkomt, waarnaar gedifferentieerd is; voor electrisch en mechanisch continu werkende toestellen is dat geen bezwaar.

Interpreteert men terugkoppeling als continue iteratie, dan verdwijnen de moeilijkheden. Het stabiliteitsvraagstuk is dan geheel in overeenstemming met het vraagstuk van het asymptotische gedrag van $t \to \infty$ van het continue iteratie-probleem.

Continue iteratie heeft boven discrete iteratie zeer bepaalde practische voordelen; ook van theoretisch standpunt geldt dit nog: asymptotische vraagstukken zijn vaak beter toegankelijk dan gewone convergentievraagstukken. De classificatie van rekenmachines naar de wijze van hun iteratieprocédé kan het inzicht in verschillende problemen verhelderen.

COMPOSITIE EN CONSTRUCTIE

door

F. VAN DER BLIJ.

„Ihr messet das Gewicht der Vokale in einem alten Gedicht und setzt seine Formel zu der einer Planetenbahn in Beziehung. Das ist entzückend, aber es ist ein Spiel. Ein Spiel ist ja auch euer höchstes Geheimnis und Symbol, das Glasperlenspiel."

„Sie meinen, es fehle uns das Fundament der Theologie?"

„Ach, von Theologie wollen wir gar nicht reden, davon seid ihr noch allzuweit entfernt. Es wäre euch schon mit einigen einfacheren Fundamenten gedient, mit einer Anthropologie zum Beispiel, einer wirklichen Lehre und einem wirklichen Wissen vom Menschen."

Hermann Hesse: Das Glasperlenspiel.

Op een concert, gegeven ter gelegenheid van het Internationale Mathematiker-Kongress Zürich 1932, werd een compositie van Arthur Honegger uitgevoerd. In het voorwoord van de partituur lezen we: „J'ai toujours aimé passionnément les locomotives; pour moi, ce sont des êtres vivants et je les aime comme d'autres aiment les femmes ou les chevaux." [1]) De *compositie* Pacific 231 is *geconstrueerd* op het rhythme van de wieltikken, achtereenvolgens twee tikken, drie tikken, één tik van de Pacific locomotief, die van voren naar achter twee paar kleine, drie paar grote en één paar kleine wielen bezit.

Ik wil in dit artikel Uw aandacht vragen voor enkele trekken van het wiskundig denken, die in nauw verband staan met trekken van het technisch denken en van het denken van de abstracte kunstenaar. We kiezen daartoe twee uitspraken over de wiskunde als uitgangspunt. „Ik noem dan *Wiskunst* niet de weetenschap der grootheden; niet algemeene Rekenkunde; niet taal der berekeningen; ik verdeel haar niet in zo veele bijzondere weetenschappen als gewoonlijk plaats heeft, *maar ik noem haar de kunst, om tekens uit te vinden, welke korter, duidelijker en bepaalder, dan de woorden onzer gebruikelijke spraaken zijnde, alle mogelijke betrekkingen van grootheden tot grootheden uitdrukken; en bij gevolg ons al dat geene, waar van wij, zonder hulp deezer tekens, een verward en duister denkbeeld zouden hebben, zoo klaar en duidelijk voor den geest brengt, dat wij alles, wat in die uitgedrukte betrekkingen ligt opgeslooten, met het uiterste gemak, en volkomen zekerheid, ontwikkelen kunnen.*" [2])

Deze definitie voor wiskunde werd op den 26sten Slagtmaand 1805 door Jacob de Gelder uitgesproken in de Maatschappij voor